MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI

Conf. dr.
P. HAMBURG

Prof. dr.
P. MOCANU

Prof. dr.
N. NEGOESCU

ANALIZĂ MATEMATICĂ

(FUNCŢII COMPLEXE)

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI – 1982

Manualul a fost analizat și aprobat de colectivul catedrei de analiză, algebră și geometrie și de conducerea Facultății de matematică ale Universității „Babeș-Bolyai" din Cluj-Napoca.

Referent științific : Prof. dr. **M. REGHIȘ**

Redactor : Prof. VALENTIN RADU
Tehnoredactor : PARASCHIVA GAȘPAR
Grafician : ANCA PÎSLARU

Prefață

În această lucrare se tratează capitolele de funcții complexe prevăzute în programa analitică a cursului de analiză matematică ce se predă studenților din anul doi de la facultățile de matematică, respectiv secțiile de matematică și informatică ale facultăților de științele naturii din învățămîntul universitar. Manualul este de asemenea util tuturor studenților de la facultățile sau secțiile din învățămîntul superior, care au prevăzute în programele analitice de matematică unele capitole de funcții complexe.

În cele șapte capitole ale manualului sînt prezentate sub o formă accesibilă și în același timp riguroasă noțiunile, metodele și rezultatele fundamentale ale teoriei funcțiilor complexe, precum și unele aplicații ale acestei teorii în diferite domenii ale științei și tehnicii.

Autorii s-au străduit să selecteze și să sintetizeze într-un spațiu restrîns elementele de bază ale uneia dintre cele mai dezvoltate discipline matematice, la care școala românească de matematică a adus importante contribuții.

Redactarea capitolelor și paragrafelor a fost făcută de către autorii acestui manual după cum urmează: Cap. I, Cap. II, § 5 (Cap. III) și § 2 (Cap. V) — **N. Negoescu** *(Univ. „Al. I. Cuza” Iași); §§ 1—4 (Cap. III), §§ 1,3 (Cap. V) și Cap. VII —* **P. Hamburg** *(Univ. Craiova); Cap. IV și Cap. VI —* **P. Mocanu** *(Univ. „Babeș-Bolyai” Cluj-Napoca).*

CUPRINS

CAPITOLUL I. **Numere complexe**

§ 1. Corpul numerelor complexe 7
§ 2. Forma algebrică a numerelor complexe 8
§ 3. Operația de conjugare. Modulul unui număr complex 9
§ 4. Argumentul unui număr complex 10
§ 5. Planul complex 13
§ 6. Planul complex extins și reprezentarea lui sferică 16

CAPITOLUL II. **Funcții olomorfe**

§ 1. Noțiunea de funcție complexă 20
§ 2. Limite și continuitate 21
§ 3. Drumuri în C 21
§ 4. Funcții complexe derivabile de o variabilă reală 25
§ 5. Derivata unei funcții complexe de o variabilă complexă 26
§ 6. Funcții olomorfe 30
§ 7. Exemple de funcții olomorfe pe C (funcții întregi) 33
§ 8. Funcții omografice 35
§ 9. Funcții raționale 38
§ 10. Aplicații multivoce 39
§ 11. Interpretarea geometrică a derivatei 40

CAPITOLUL III. **Integrarea funcțiilor complexe**

§ 1. Integrala complexă 46
§ 2. Teorema lui Cauchy 56
§ 3. Formulele lui Cauchy 64
§ 4. Formulele lui Schwarz și Poisson 74
§ 5. Integrarea formelor diferențiale de gradul întîi 78

CAPITOLUL IV. **Şiruri şi serii de funcţii olomorfe**

§ 1. Şiruri de funcţii olomorfe 89
§ 2. Serii de puteri 91
§ 3. Analiticitatea funcţiilor olomorfe 95
§ 4. Zerourile unei funcţii olomorfe. Teorema identităţii funcţiilor olomorfe 100
§ 5. Teorema maximului modulului 102
§ 6. Serii Laurent 105

§ 7. Puncte singulare 109
§ 8. Funcții meromorfe 115

CAPITOLUL V. **Teorema reziduurilor**

§ 1. Teorema reziduurilor 117
§ 2. Calculul unor integrale definite cu ajutorul reziduurilor 121
§ 3. Studiul funcțiilor meromorfe cu ajutorul reziduurilor 134

CAPITOLUL VI. **Reprezentarea conformă**

§ 1. Mulțimi de funcții olomorfe 139
§ 2. Funcții univalente 143
§ 3. Problema reprezentării conforme 146
§ 4. Reprezentarea conformă a domeniilor simplu conexe. Teorema lui Riemann 148

CAPITOLUL VII. **Prelungirea analitică**

§ 1. Prelungirea analitică 153
§ 2. Suprafețe riemanniene 160
INDEX 164
BIBLIOGRAFIE 167

CAPITOLUL I

NUMERE COMPLEXE

În acest capitol se reamintește construcția numerelor complexe ca perechi ordonate de numere reale. Cum din punctul de vedere al analizei matematice planul este mulțimea perechilor ordonate de numere reale, numerele complexe se identifică cu punctele P ale unui plan euclidian (cu metrica $\mathbf{d} : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definită prin $\mathbf{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$, unde P_1 și P_2 au coordonatele (x_1, y_1) și (x_2, y_2) respectiv), numit *planul reprezentativ al numerelor complexe sau planul complex.* Această interpretare geometrică a numerelor complexe ajută la formarea de modele intuitive și dă sugestii pentru demonstrarea unor teoreme. În ultima parte a capitolului, se compactifică corpul $\mathbf{C}$ al numerelor complexe cu un număr și se arată că planul complex extins este omeomorf cu sfera unitate și se dă interpretarea geometrică a acestui omeomorfism. Menționăm că în acest capitol introductiv se amintesc și se comentează rezultate cunoscute din cursurile de algebră și analiză. Se insistă, în special asupra definiției argumentului unui număr complex, fără a folosi intuiția geometrică și asupra compactificării planului complex. Pentru elementele de topologia planului complex se folosesc sisteme fundamentale de vecinătăți formate din discuri centrate în puncte.

Notăm cu $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ respectiv mulțimea numerelor naturale, inelul întregilor, corpul numerelor raționale și corpul numerelor reale. Convenim să notăm cu $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{R}^*$ aceleași mulțimi de numere care nu includ pe 0 și cu $\mathbf{Q}_+$, $\mathbf{R}_+$ mulțimea numerelor raționale pozitive (0 inclus) respectiv mulțimea numerelor reale pozitive (0 inclus). Pentru operații cu mulțimi vom folosi notațiile uzuale $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ pentru reuniune, intersecție, diferență, produs cartezian al mulțimilor A și B. $A \times A$ se va nota cu A^2.

Menționăm că în acest capitol se urmărește, de asemenea, de a se stabili unele notații unitare ce vor fi folosite în întregul manual.

§ 1. CORPUL NUMERELOR COMPLEXE

1.1. **Definiție.** Fie $\mathbf{R}^2$ produsul cartezian al perechilor ordonate (x, y) de numere reale. Definim pe mulțimea $\mathbf{R}^2$ operațiile de adunare și înmulțire prin

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Prin definiție, mulțimea numerelor complexe **C** este mulțimea $\mathbf{R}^2$ dotată cu aceste operații de adunare și înmulțire. Prin urmare, prin **C** înțelegem tripletul $(\mathbf{R}^2, +, .)$.

1.2. **Propoziție.** **C** *este corp comutativ.* În adevăr, din proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire pentru numere reale rezultă imediat că operațiile introduse în **C** sînt comutative, asociative, înmulțirea este distributivă față de adunare și (0,0) și (1,0) sînt elemente neutre pentru adunare și respectiv înmulțire, $(-x, -y)$ este opusul lui (x, y) pentru că $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$. Opusul elementului $z = (x, y)$ se notează cu $-z$.

De asemenea, orice element $z \in \mathbf{C} \setminus \{(0, 0)\} = \mathbf{C}^*$ are invers, pentru că ecuația $(x, y)(x_1, y_1) = (1, 0)$ cu $(x, y) \neq (0, 0)$ este echivalentă cu sistemul compatibil în x_1 și y_1: $xx_1 - yy_1 = 1$, $yx_1 + xy_1 = 0$. Deci, inversul lui $z = (x, y) \in \mathbf{C}^*$ este $(x_1, y_1) = (x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2)) \in \mathbf{C}^*$. Inversul elementului z se notează cu $\frac{1}{z}$. □

Evident, în **C** și $\mathbf{C}^*$ se pot defini operații inverse celor introduse în (1.1), care se numesc respectiv scădere și împărțire.

Corpul comutativ $\mathbf{C} = (\mathbf{R}^2, +, .)$ se numește *corpul numerelor complexe* și elementele lui se numesc *numere complexe.*

§ 2. FORMA ALGEBRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

1.3. **Propoziție.** *Mulțimea* $\mathbf{R} \times \{0\} = \{(x, 0);\ x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{C}$ *dotată cu operațiile din* **C** *este un subcorp al lui* **C** *iar aplicația* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \{0\}$, *unde* $\varphi(x) = (x, 0)$, *este un izomorfism de corpuri.*

Evident φ este o bijecție care păstrează operațiile:

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2). \ \square$$

Izomorfismul φ ne permite să identificăm $\mathbf{R} \times \{0\}$ cu **R** așa că putem considera **R** ca o submulțime a corpului **C** și putem scrie x în locul perechii $(x, 0)$. Astfel numerele complexe (0,0), (1,0) (—1,0) se identifică cu 0, 1, —1 din **R**.

Notînd cu i numărul complex (0,1) avem următoarea:

1.4. **Propoziție.** *Orice număr complex* $z = (x, y)$ *se poate reprezenta în mod unic în forma* $x + \mathrm{i}y$, *unde* $x, y \in \mathbf{R}$, *iar* $\mathrm{i} \in \mathbf{C}$ *și* $\mathrm{i}^2 = -1$.

Expresia $x + \mathrm{i}y$ se numește forma algebrică a numărului complex (x, y).

1.5. *Observație. Definițiile adunării și înmulțirii date în (1.2) nu trebuie memorate pentru că ele urmează imediat ținînd cont că* **C** *este corpul comutativ al numerelor* $z = x + \mathrm{i}y$, *unde* $x, y \in \mathbf{R}$ *și* $\mathrm{i}^2 = -1$

În adevăr,

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

și

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1x_2 + x_2y_1).$$

§ 3. OPERAȚIA DE CONJUGARE. MODULUL UNUI NUMĂR COMPLEX

1.6. **Definiții.** Dacă $z = x + iy$ este un număr complex, atunci x, y, $x - iy$ și $(x^2 + y^2)^{1/2}$ se numesc respectiv *partea reală*, *partea imaginară*, *conjugatul și modulul lui* z, ele se notează cu $\mathbf{Re}\, z$, $\mathbf{Im}\, z$, $\bar{z}$ și $|z|$.

1.7. **Propoziție.** *Oricare ar fi numerele complexe* z, z_1, z_2 *avem următoarele proprietăți de bază:*

1) $$\mathbf{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ și } \mathbf{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

2) $$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2 \text{ și } \bar{\bar{z}} = z,$$

3) $$-|z| \leqslant \mathbf{Re}\, z \leqslant |z| \text{ și } -|z| \leqslant \mathbf{Im}\, z \leqslant |z|, \quad |\bar{z}| = |z|,$$

4) $$|z|^2 = z\bar{z} \text{ și } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ dacă } z \neq 0.$$

5) $$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \ |z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|, \ |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Demonstrație. 1) rezultă prin adunare și scădere a relațiilor $x + iy = z$ și $x - iy = \bar{z}$. Proprietățile 2), 3) și 4) se verifică imediat. Primele două propoziții din 2) arată că operația de conjugare $z \to \bar{z}$ este un izomorfism al lui $\mathbf{C}$ pe $\mathbf{C}$, adică operația de conjugare este un automorfism al lui $\mathbf{C}$. Ultima proprietate din 2) exprimă că operația de conjugare este involutivă. Prima relație din 5) rezultă din definiția modulului. Pentru a demonstra relația a doua folosim 4) și avem

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)} = z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2.$$

Cum modulul este pozitiv, prin extragere a rădăcinii pătrate se obține relația a doua din 5). Deoarece $\overline{z_1\bar{z}_2} = \bar{z}_1z_2$ urmează $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\mathbf{Re}(z_1\bar{z}_2)$ și avem

1.8. $$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = |z_1|^2 + 2\mathbf{Re}\,(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$

Observînd că $\mathbf{Re}\,(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1|\,|z_2|$ din prima formulă 3) și extrăgînd rădăcina pătrată, obținem ultima inegalitate 5), numită *inegalitatea triunghiului.* ☐

1.9. *Observaţie.* Menţionăm că în corpul $\mathbf{C}$ al numerelor complexe nu se introduce nici o relaţie de ordine. Prin urmare relaţia $z_1 \leqslant z_2$ cu $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ nu are sens.

Aplicaţia $z \mapsto \bar{z}$ este un automorfism involutiv (propoziţia 1.7) care invariază pe $\mathbf{R}$. În cazul $z \in \mathbf{R}$ automorfismul se reduce la aplicaţia identitate.

1.10. *Observaţie.* Se arată imediat că primele două relaţii din 2) se extind la un număr finit de termeni sau factori, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ şi $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ pentru $z_2 \neq 0$. De asemenea ultimele două relaţii din 5) se extind la un număr finit de factori sau termeni.

Procedînd ca la demonstrarea formulei (1.8) obţinem

1.11. $$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\mathbf{Re}\,(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$

şi inegalitatea

1.12. $$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Mai amintim relaţiile

1.13. $$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \quad \text{(legea paralelogramului).}$$

1.14. $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ pentru } z_2 \neq 0 \text{ şi } \begin{matrix}|\mathbf{Re}\,z|\\ |\mathbf{Im}\,z|\end{matrix} \leqslant |z| \leqslant |\mathbf{Re}\,z| + |\mathbf{Im}\,z|.$$

Formulele (1.13) rezultă din adunarea membru cu membru a formulelor (1.8) şi (1.11). Relaţiile (1.14) sînt imediate. Vom folosi des aceste inegalităţi.

§ 4. ARGUMENTUL UNUI NUMĂR COMPLEX

Pentru a defini argumentul unui număr complex avem nevoie de definiţii analitice ale sinusului şi cosinusului care să nu apeleze la intuiţia geometrică. Metoda adoptată foloseşte proprietăţi simple ale integralelor definite şi ale celor improprii.

Considerăm funcţia impară $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin : $\alpha(y) = 2\displaystyle\int_0^y \frac{dt}{1+t^2}$.

Avînd $\alpha'(y) = \dfrac{2}{1+y^2} > 0$ pentru orice $y \in \mathbf{R}$, funcţia α este strict crescătoare, deci injectivă. Integrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ fiind convergentă, $\lim\limits_{y\to+\infty} \alpha(y)$ este finită şi pozitivă. Vom nota cu π acest număr. Cum $\lim\limits_{y\to-\infty} \alpha(y) = -\pi$, α realizează o bijecţie de la $\mathbf{R}$ la $]-\pi, +\pi[$. Fie $\beta = \alpha^{-1} :]-\pi, \pi[\to \mathbf{R}$ inversa ei. α avînd derivata nenulă β va fi şi ea derivabilă.

1.16. **Definiție.** Notăm cu e : $]-\pi, +\pi[\to \mathbf{C}$ funcția definită prin $e(\theta) = \dfrac{1 + i\beta(\theta)}{1 - i\beta(\theta)}$. Evident $|e(\theta)| = 1$ și în particular $e(0) = 1$. Funcția e se prelungește prin continuitate pe intervalul închis $[-\pi, +\pi]$ punînd $e(\pm\pi) = \lim\limits_{\theta \to \pm\pi} e(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \pm\pi} \dfrac{1 + i\beta(\theta)}{1 - i\beta(\theta)} = \lim\limits_{y \to \pm\infty} \dfrac{1 + iy}{1 - iy} = -1$. Putem acum extinde definiția funcției e la **R** prin periodicitate :

1.17. $$e(\theta + 2\pi) = e(\theta).$$

În intervalul $\theta \in]-\pi, +\pi[$ avem $e'(\theta) = \dfrac{2i\beta'(\theta)}{(1 - i\beta(\theta))^2} = \dfrac{2i}{\alpha'(y)\,(1 - iy)^2} = i\dfrac{1 + y^2}{(1 - iy^2)} = i\dfrac{1 + iy}{1 - iy} = i\dfrac{1 + i\beta(\theta)}{1 - i\beta(\theta)}$ unde $y = \beta(\theta)$. Prin urmare :

1.18. $e'(\theta) = ie(\theta)$, valabilă pentru $\theta \in \mathbf{R} \setminus \{(2k + 1)\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$. Funcția e fiind continuă pe $[\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$ și derivabilă pe $]\pi - \varepsilon, \pi[\cup]\pi, \pi + \varepsilon[$ putem aplica teorema lui Lagrange la dreapta și la stînga lui π pentru funcțiile $u = u(\theta)$ și $v = v(\theta)$, partea reală și partea imaginară a funcției e :

1.19. $$\frac{e(\pi + \varepsilon) - e(\pi)}{\varepsilon} = \frac{u(\pi + \varepsilon) - u(\pi)}{\varepsilon} + i\frac{v(\pi + \varepsilon) - v(\pi)}{\varepsilon} =$$

$$= u'(\theta_1) + iv'(\theta_2) = u'(\theta_1) + iv'(\theta_1) + \gamma, \text{ unde } \theta_1, \theta_2 \in]\pi, \pi + \varepsilon[\text{ și}$$

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} \gamma = 0. \text{ Deci } e'(\pi) = \lim_{\varepsilon \to 0} e'(\theta_1) = -i.$$

Analog, $e'(-\pi) = -i$. Prin urmare (1.18) e valabilă și în $\theta = \pm\pi$ deci și pentru orice $\theta \in \mathbf{R}$.□

1.20. **Propoziție.** *Funcția $f = a.e$ unde $a \in \mathbf{C}$ satisface ecuația diferențială $f' = if$. Reciproc dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ și $f' = if$, atunci $f(\theta) = f(0)\cdot e(\theta)$. În particular $f(0) = 1$ implică $f = e$. Funcția* e *admite următoarea teoremă de adunare :*

$$e(\theta_1 + \theta_2) = e(\theta_1)\cdot e(\theta_2).$$

Prima parte este evidentă. Dacă $f' = if$, atunci $\left(\dfrac{f}{e}\right)' = \dfrac{e\cdot if - f\cdot ie}{e^2} = 0$. Deci pentru orice $\theta \in \mathbf{R}$ avem $f(\theta)/e(\theta) = f(0)/e(0) = f(0)$. Formula de adunare rezultă de aici punînd $f(\theta) = e(\theta_1 + \theta)$: avînd $f' = if$ și $f(0) = e(\theta_1)$ rezultă că $e(\theta_1 + \theta) = e(\theta_1)\cdot e(\theta)$.□

1.21. **Definiție.** Numim cosinus respectiv sinus, pe care le notăm cu cos și sin partea reală respectiv imaginară a funcției e, adică pentru orice $\theta \in \mathbf{R}$ avem $e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Separînd părțile reale și imaginare în formula (1.18) obținem formulele de derivare $(\cos\theta') = -\sin\theta$, $(\sin\theta)' = \cos\theta$.

1.22. **Propoziție.** *Aplicația $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ este un omomorfism al grupului aditiv* **R** *pe grupul multiplicativ al numerelor complexe ζ cu $|\zeta| = 1$, nucleul acestui omomorfism (subgrupul numerelor θ astfel ca $\cos\theta + i\sin\theta = 1$) este mulțimea tuturor multiplilor întregi ai lui 2*

Prima parte rezultă din propoziția precedentă $e(\theta_1 + \theta_2) = e(\theta_1)e(\theta_2)$. Ecuația $e(\theta) = 1$ este satisfăcută pentru $\theta = 2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$ ceea ce rezultă din observația că $\sin \theta > 0$ pentru $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos \theta < 0$ pentru $\in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ și $\sin \theta < 0$ pentru $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$. Prin urmare $e(\theta) \neq 1$ pentru $\theta \in]0, 2\pi[$ și din cauza periodicității $\theta = 2k\pi$ cu $k \in \mathbf{Z}$ sînt singurele numere care satisfac ecuația $\cos \theta + i \sin \theta = 1$.

1.23. $e(\theta_1) = e(\theta_2) \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ conform ultimei relații din (1.20).

Acum putem defini argumentul. Dacă $\zeta = \xi + i\eta$ cu $|\zeta| = 1$, atunci ecuația $e(\theta) = \zeta$ are o soluție unică în $]-\pi, \pi]$. În cazul $\xi \geqslant 0$, $\eta \in [-1, 1]$ argumentul θ al lui ζ este dat de $\theta = 2\int_0^{\eta} \frac{dt}{1+t^2}$. Pentru $\xi < 0$, $\eta \in [-1, 1]$ ecuația $e(\theta) = \zeta$ are soluția $\theta + \pi$. În baza propoziției (1.22), putem da următoarea definiție generală a argumentului.

1.24. **Definiție.** *Pentru orice număr complex $z \neq 0$ orice soluție θ a ecuației $\cos \theta + i \sin \theta = z/|z|$ se numește argument al numărului complex z.*

Din definiție rezultă că pentru $z = 0$ nu corespunde nici un argument și că oricărui număr complex $z \in \mathbf{C}^*$ îi corespund o infinitate de argumente. Mulțimea argumentelor lui $z \in \mathbf{C}^*$ se notează cu $\mathbf{Arg}\, z$ și se numește *clasa argumentelor lui z*. Argumentul trebuie înțeles ca o aplicație multivocă de la $\mathbf{C}^*$ în $P(\mathbf{R})$, adică $\mathbf{Arg} : \mathbf{C}^* \to P(\mathbf{R})$, unde $\mathbf{Arg}\,(\mathbf{C}^*)$ este o mulțime $A \subset P(\mathbf{R})$ cu fiecare element de forma $\{\theta + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$, θ fixat din $]-\pi, \pi]$.

1.25. **Definiție.** Funcția $\arg : \mathbf{C}^* \to]-\pi, \pi]$ care are ca valoare soluție unică $\theta \in]-\pi, \pi]$ a ecuației $e(\theta) = z/|z|$ se numește *argumentul principal al lui z* și se notează cu $\arg z$ (notat cu a)

Aplicația multivocă $\mathbf{Arg}$ (notată cu A, notație preluată de la aplicații multivoce și care va fi folosită și în continuare în analiza complexă) se definește prin relația $\mathbf{Arg}\, Z = \{\arg z + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$, ceea ce se scrie

1.26. $$\mathrm{Arg}\, z \equiv \arg z (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

1.27. *Observație.* Din formula (1.23) și prin verificări simple obținem $\mathbf{Arg}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathbf{Arg}\, z_1 + \mathbf{Arg}\, z_2$, $\mathbf{Arg}\,(z_1/z_2) = \mathbf{Arg}\, z_1 - \mathbf{Arg}\, z_2$, $\arg z = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Re}\, z > 0$ și $\mathbf{Im}\, z = 0$, $\arg z = \pi \Leftrightarrow \mathbf{Re}\, z < 0$ și $\mathbf{Im}\, z = 0$.

1.28. *Observație.* Ecuația din definiția (1.24) ne permite să dăm o *reprezentare trigonometrică* a oricărui număr complex z din $\mathbf{C}^*$ prin formula

1.29. $$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ unde } \theta \in \mathbf{Arg}\, z$$

1.30. *Aplicație.* Ecuația binomă $z^n = a$ (unde $a \neq 0$ este dat) este echivalentă cu $|z| = |a|^{1/n}$ și $\mathbf{Arg}\, z = \frac{1}{n}\mathbf{Arg}\, a = \frac{1}{n}(\arg a + 2k\pi)$ ceea ce dă n soluții complexe $z_k = |a|^{1/n}\left(\cos \frac{1}{n}(\arg a + 2k\pi) + i \sin \frac{1}{n}(\arg a + 2k\pi)\right)$, $k \in \overline{0, n-1}$. Această aplicație pune în evidență că, în (1.29), trebuie să punem $\theta \in \mathbf{Arg}\, z$ și nu $\theta = \arg.\, z$.

1.31. *Aplicație.* Din ultima formulă din (1.20), obținem formulele $\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$, $\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$.

1.32. *Observație.* Din formulele (1.29) și (1.27) pentru $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$, rezultă

1.33. $z_1z_2=|z_1|\,|z_2|\,[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$, unde $\theta_1\in \mathbf{Arg}\, z_1$, $\theta_2\in\mathbf{Arg}\,z_2$ și $z^n=|z|^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$, pentru $z\neq 0$, $\theta\in\mathbf{Arg}\,z$ și $n\in N$.

Ca un caz particular al acestei ultime relații obținem formula lui Moivre:

1.34. $$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

§ 5. PLANUL COMPLEX

1.35. **Definiții.** Conform definiției (1.1) avem $\mathbf{C}=(\mathbf{R}^2;\ +,\ .)$ și prin urmare, orice număr complex $z=(x,\ y)=x+\mathrm{i}y$ este un element din $\mathbf{R}^2$, adică este un punct al spațiului aritmetic real bidimensional. Avînd în vedere că $\mathbf{R}^2$ se identifică cu spațiul euclidian bidimensional (planul euclidian), întregul limbaj geometric relativ la $\mathbf{R}^2$ se transferă în mod natural asupra corpului $\mathbf{C}$.

Putem vorbi deci despre planul $\mathbf{C}$, despre punctul $z\in\mathbf{C}$ și despre o mulțime de puncte (o figură geometrică) $A\subset\mathbf{C}$. Astfel, mulțimea părților reale $x=\mathbf{Re}\,z$ ale tuturor numerelor complexe se numește *axa reală*, mulțimea părților imaginare se numește *axa imaginară*. Mulțimile de puncte z pentru care $\mathbf{Re}\,z<0$, $\mathbf{Re}\,z>0$, $\mathbf{Im}\,z<0$, $\mathbf{Im}\,z>0$ se numesc respectiv semiplanul stîng, drept, inferior, superior al planului complex. Se mai introduc semiaxele reale, negative și pozitive și semiaxele imaginare, negative și pozitive. O dreaptă are ecuația $z=a+bt$ cu $a\in\mathbf{C}$, $b\in\mathbf{C}^*$ fixe și t parcurgînd $\mathbf{R}$ (trece prin a și este paralelă cu $\overrightarrow{Ob}$). Ecuația dreptei se scrie și în forma $\mathbf{Im}\,(z-a)/b=0$. Mulțimea $\{z\in\mathbf{C}:\mathbf{Im}\,(z-a)/b>0\}$ se numește, prin convenție, semiplanul stîng, și mulțimea $\{z\in\mathbf{C};\ \mathbf{Im}\,(z-a)/b<0\}$ se numește semiplanul drept.

Unghiul dintre două drepte $z=a_1+b_1t$ și $z=a_2+b_2t$ este definit ca $\mathbf{Arg}\,b_2/b_1$, el depinde de ordinea în care sînt date dreptele și are o infinitate de valori reale sau trebuie interpretat ca un număr real modulo 2π.

Notînd cu $\theta=\arg\,(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oz})$ și folosind asemănarea triunghiurilor $OPM\sim OAZ$, avem $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, de unde $z=r\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$. Comparînd cu definiția analitică a argumentului (după 1.23) și cu formula (1.29), obținem interpretarea geometrică pentru $\cos\theta$, $\sin\theta$, $|z|$ și $\arg z$: $\cos\theta=\overline{OP}$, $\sin\theta=\overline{PM}$, $|z|$ și $\arg z$ sînt coordonatele polare ale numărului complex z (r și θ).

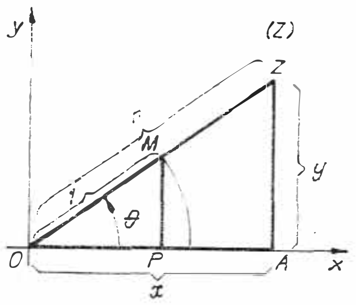


Fig. 1.35

Sectorul unghiular $S_{z_0}(\alpha_1,\ \alpha_2)$ este prin definiție mulțimea punctelor $z\neq z_0$ care satisfac inegalitățile $\alpha_1<\arg\,(z-z_0)<\alpha_2$. Dezavantajul argumentului lui z este că are un salt de la $-\pi$ la π cînd z traversează semiaxa reală negativă. $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ prin definiția modulului din (1.6) dar membrul doi în planul euclidian $\mathbf{R}^2$ reprezintă distanța $\mathbf{d}(z_1, z_2)$. Pentru triunghiul cu vîrfurile în z_1, z_2, z_3 avem inegalitatea triunghiului : $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$ cu interpretarea geometrică : lungimea unei laturi este mai mică sau egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi. Interpretarea geometrică a formulei (1.13) (legea paralelogramului) enunță un rezultat geometric cunoscut, că suma pătratelor lungimilor laturilor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor.

1.36. Structura metrică și topologică a corpului C

Mulțimea $\{z \in \mathbf{C}\,;\ |z - z_0| < r\}$ se numește *disc centrat în* z_0 *de rază* $r > 0$ și se notează cu $U(z_0\,; r)$. Convenim să notăm cu $\hat{U}(z_0\,;\ r)$ mulțimea $U\ (z_0\,; r) \setminus \{z_0\}$ și să o numim *disc punctat centrat în* z_0 *de rază* r. Mulțimea $\{z \in C\,; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ se numește *coroană circulară* centrată în z_0 de raze r_1 și r_2 și se notează cu $U(z_0\,; r_1, r_2)$. Se vede că $\dot{U}(z_0\,; r) = U(z_0\,; 0, r)$. O submulțime G a lui $\mathbf{C}$ se numește *deschisă* dacă este vidă sau, în caz contrar, oricare ar fi $z_0 \in G$ există un disc $U(z_0\,;\ r) \subset G$. Evident $\mathbf{C}$ și orice disc sînt mulțimi deschise. O submulțime F a lui $\mathbf{C}$ se numește *închisă* dacă este complementara unei mulțimi deschise. Deoarece $\mathbf{C} = c\emptyset$, $\emptyset = c\mathbf{C}$ urmează că $\mathbf{C}$ și $\emptyset$ sînt și închise. Se demonstrează simplu că orice reuniune de mulțimi deschise este deschisă, orice intersecție finită de mulțimi deschise este deschisă. Prin urmare, familia mulțimilor deschise este o topologie pe $\mathbf{C}$. Această topologie este indusă de metrica $\mathbf{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Mulțimile finite și mulțimile $F = \{z \in \mathbf{C}\,;\ |z - z_0| \leqslant r\}$ și $F_{1,2} = \{z \in \mathbf{C}\,;\ r_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant r_2\}$ sînt închise pentru că complementarele lor sînt deschise.

O submulțime A a lui $\mathbf{C}$ se numește *mărginită* dacă există un disc $U(0\,; r)$ astfel încît $A \subset U(0\,; r)$.

Se numește *segment cu punctul inițial* z_1 și *punctul final* z_2 mulțimea $[z_1, z_2] = \{z \in \mathbf{C}\,;\ z = z_1 + t(z_2 - z_1),\ t \in [0, 1]\}$. O submulțime A a lui $\mathbf{C}$ se numește *conexă* dacă nu există nici o submulțime a sa nevidă diferită de A care să fie simultan deschisă și închisă în A considerată ca subspațiu al lui $\mathbf{C}$. Reuniunea a două discuri disjuncte este o mulțime neconexă. O submulțime a lui $\mathbf{C}$ deschisă și conexă se numește *domeniu*. Convenim ca domeniile să fie notate cu D. Se vede că $U\ (z_0\,;\ r)$ și $\dot{U}(z_0\,; r)$ sînt domenii. Segmentele din $\mathbf{C}$ nu sînt domenii pentru că nu sînt deschise.

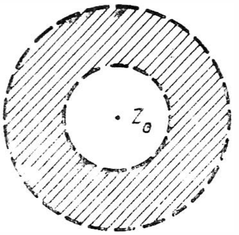


Fig. 1.36 *a*

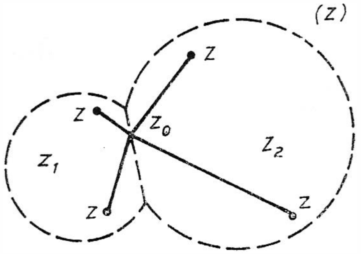


Fig. 1.36 *b*

Un domeniu D din $\mathbf{C}$ se numește domeniu stelat în raport cu $z_0 \in D$ dacă pentru orice $z \in D$ segmentul $[z_0, z] \subset D$. Un domeniu stelat în raport cu orice punct al său se numește *domeniu convex*.

Se vede imediat că orice disc $U(z_0\,; r)$ este domeniu stelat și convex. Discurile punctate $\dot{U}(z_0\,;\ r)$ sînt domenii dar nu sînt convexe și nu există nici un punct $z_1 \in \dot{U}(z_0 ; r)$ în raport cu care să fie stelat. $U(z_1 ; r_1) \cup U(z_2 ; r_2)$ este domeniu stelat dar nu este convex. (Figura 1.36).

Un punct $z_0 \in \mathbf{C}$ se numește *punct aderent pentru* $A \subset \mathbf{C}$ dacă pentru orice $U(z_0 ; r)$ avem $U(z_0 ; r) \cap A \neq \emptyset$. Un punct $z_0 \in \mathbf{C}$ se numește *de acumulare* pentru $A \subset \mathbf{C}$ dacă pentru orice $U(z_0 ; r)$ avem $\dot{U}(z_0 ; r) \cap A \neq \emptyset$. $z_0 \in \mathbf{C}$ se numește *punct frontieră* pentru $A \subset \mathbf{C}$ dacă pentru orice $U(z_0 ; r)$ avem $U(z_0 ; r) \cap A \neq \emptyset$ și $U(z_0 ; r) \cap cA \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor aderente ale lui A se numește *aderența* sau *închiderea* lui A și se notează cu $\bar{A}$. Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A se numește *derivata mulțimii* A și se notează cu A'. Mulțimea punctelor frontieră ale lui A se numește *frontiera mulțimii* A și se notează cu ∂A. Avem $A \subset \bar{A}$, $\bar{A} = A \cup A'$, $\partial A = \bar{A} \cap c\bar{A}$. Se demonstrează următoarele teoreme de caracterizare: 1) o mulțime $A \subset \mathbf{C}$ este mărginită dacă și numai dacă orice șir $(z_n) \subset A$ conține un subșir convergent; 2) o mulțime $F \subset \mathbf{C}$ este închisă dacă și numai dacă pentru orice șir $(z_n) \subset F$ convergent avem $\lim_{n\to\infty} z_n \in F$; 3) A este închisă dacă și numai dacă $A = \bar{A}$. Se vede imediat că $\overline{U}(z_0 ; r) = \overline{\dot{U}}(z_0 ; r) = \{z \in \mathbf{C} ; |z - z_0| \leqslant r\}$, $\partial\overline{U}(z_0 ; r) = \{z \in \mathbf{C} ; |z - z_0| = r\}$. O mulțime $A \subset \mathbf{C}$ se numește *compactă* dacă orice șir $(z_n) \subset A$ conține un subșir convergent către un punct $z_0 \in A$. Se demonstrează că o mulțime $A \subset \mathbf{C}$ este compactă dacă și numai dacă este mărginită și închisă, imaginile continue ale mulțimilor compacte (conexe) sînt compacte(conexe) și orice șir Cauchy din $\mathbf{C}$ este convergent, ceea ce arată că $\mathbf{C}$ este *spațiu metric complet*.

În cele ce urmează sînt utile unele rezultate privind *distanța* (nu metrica) *de la* **A** *la* **B**, $\mathbf{d}(A, B)$, definită prin $\mathbf{d}(A, B) = \inf\{\mathbf{d}(a, b) ; a \in A, b \in B\}$. Mulțimile $A = \{(x, 0) ; x \in \mathbf{R}\}$ și $B = \{(x, e^x) ; x \in \mathbf{R}\}$ din $\mathbf{R}^2$ sînt închise și disjuncte totuși $\mathbf{d}(A, B) = 0$. $z \in \bar{A} \Leftrightarrow \mathbf{d}(z, A) = 0$.

1.37. **Propoziție** *Dacă mulțimea A este compactă, B închisă, A și B nevide și* $A \cap B = \emptyset$, *atunci* $\mathbf{d}(A, B) > 0$. Fie funcția $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(z) = \mathbf{d}(z, B)$ care se vede ușor că este continuă. Deoarece $A \cap B = \emptyset$ și B este închisă rezultă $f(z) > 0$ pentru orice $z \in A$ (în caz contrar $z \in \bar{B} = B$, contrazice ipoteza $A \cap B = \emptyset$). Fiindcă A este compactă există un punct z_0, conform teoremei lui Weierstrass, astfel încît $f(z_0) = \inf\{f(z) ; z \in A\} = \mathbf{d}(A, B)$. Deci avem $0 < f(z_0) = \mathbf{d}(A, B)$.□

1.37.1. *Dacă G este deschisă și K este un compact inclus în G, atunci* $\mathbf{d}(K, \partial G) > 0$. Se aplică proprietatea (1.37), unde K este compact și ∂G este închisă. Evident $\mathbf{d}(K, cG) = \mathbf{d}(K, \partial G) > 0$. □

1.37.2. *Dacă G este deschisă și K este un compact inclus în G, atunci există un număr finit de discuri* $U(z_k ; r)$ *cu* $r < \mathbf{d}(K, \partial G)$ *și* $k \in \overline{1, n}$, *astfel încît* $\overline{U}(z_k, r) \subset G$ *și* $K \subset \bigcup_{1}^{n} U(z_k ; r)$. Alegînd $r < \mathbf{d}(K, \partial G)$, oricare ar fi $z \in K$, $\overline{U}(z, r) \subset G$ și mulțimea discurilor $\{U(z, r) ; z \in K\}$ este o acoperire deschisă a lui K. Aplicînd teorema lui Borel-Lebesgue rezultă că există un număr finit de puncte $z_j \in K$, $j \in \overline{1, n}$ astfel încît $\bigcup_{1}^{n} U(z_j ; r) \supset K$.□

1.38. **Reprezentarea ca vectori a numerelor complexe.** Numărul complex z poate fi reprezentat în planul complex prin vectorul $\overrightarrow{Oz}$. Număr, punct și vector vor fi notate cu aceeași literă z. Dacă $\overrightarrow{Oz_1}$ și $\overrightarrow{Oz_2}$ sînt diferiți de vectorul nul din $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$, vectorii $\overrightarrow{0z}$ reprezintă suma, diferența, produsul și cîtul lor, în figurile următoare :

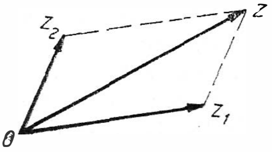


Fig. 1.38 a

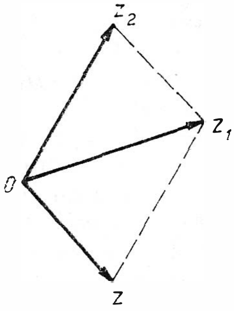


Fig. 1.38 b

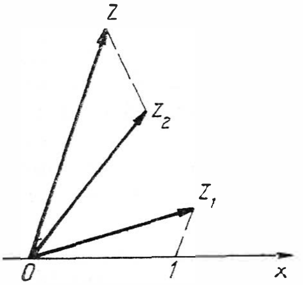


Fig. 1.38 c

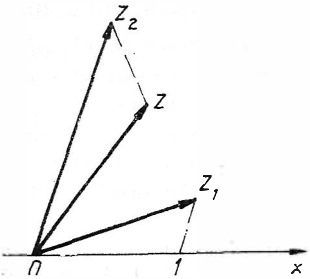


Fig. 1.38 d

Pentru a prezenta geometric produsul și cîtul numerelor z_1 și z_2, adică $z_1 z_2$ și z_1/z_2, considerăm punctele z astfel ca să avem respectiv următoarele asemănări de triunghiuri: $(0, 1, z_1) \sim (0, z_2, z)$ și $(0, 1, z_1) \sim$ $\sim (0, z, z_2)$, unde triunghiurile sînt indicate prin vîrfurile lor.

§ 6. PLANUL COMPLEX EXTINS ȘI REPREZENTAREA LUI SFERICĂ

În diverse probleme de analiză complexă este necesară extinderea mulțimii $\mathbf{C}$ a numerelor complexe prin adăugarea unui număr impropriu notat cu ∞. Prin definiție $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ și $\infty \notin \mathbf{C}$.

Legătura numerelor din $\mathbf{C}$ cu elementul ∞ se stabilește prin extinderea la acest element a operațiilor cu numere complexe punînd $a + \infty =$ $= \infty + a = \infty$ și $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ pentru $a \in \mathbf{C}_\infty / \{0\}$. Prin convenție specială (referitoare la operația de împărțire) vom scrie : $a/0 = \infty$ pentru $a \in \mathbf{C}_\infty \setminus \{0\}$ și $a/\infty = 0$ pentru $a \in \mathbf{C}$. Este imposibil de a defini $\infty - \infty$, $0.\infty$, $0/0$, ∞/∞. Deci în ce privește structura algebrică a lui $\mathbf{C}_\infty$ se pot extinde operațiile algebrice din $\mathbf{C}$, fără a fi peste tot definite. Convenția $|\infty| = +\infty$ extinde modulul de la $\mathbf{C}$ la $\mathbf{C}_\infty$.

1.39. **Definiție.** $\mathbf{C}$ ca mulțime fiind identificat cu planul euclidian, mulțimea $\mathbf{C}_\infty$ o vom numi *planul complex extins*. Pentru a lămuri comportarea punctului impropriu față de figurile geometrice elementare convenim ca să considerăm pe ∞ ca element al oricărei drepte din $\mathbf{C}_\infty$. În schimb ∞ nu aparţine nici unui cerc şi nici unui semiplan.

Pentru a satisface dezideratul de mai sus şi a elucida convenţiile de la punctul (1.39), este de dorit să introducem un model geometric în care toate punctele planului extins să aibă reprezentanţi concreţi. Pentru acest scop considerăm sfera unitate S_2 a cărei ecuaţie în spaţiul $\mathbf{R}^3$ euclidian este $x^2 + y^2 + u^2 = 1$. Fiecărui punct P de pe S_2 îi asociem un număr complex din $\mathbf{C}_\infty$ prin relaţia

$$z = \Phi(x, y, u) = \begin{cases} \dfrac{x + iy}{1 - u} & \text{dacă} \quad (x, y, u) \neq (0, 0, 1), \\ \infty & \text{dacă} \quad (x, y, u) = (0, 0, 1). \end{cases} \tag{1.40}$$

1.41. **Propoziţie.** *Dacă notăm* $N = (0, 0, 1) \in \mathbf{R}^3$ *şi* φ *este restricţia la* $S_2 \setminus \{N\}$ *a aplicaţiei* Φ *definite prin egalitatea (1.40), atunci* Φ *este un omeomorfism de la* $S_2 \setminus \{N\}$ *la* $\mathbf{C}$

Demonstraţie. 1) Aplicaţia este bijectivă. În adevăr, cum $u < 1$, avem

$$z = \frac{x + iy}{1 - u} \Rightarrow |z^2| = \frac{x + iy}{1 - u}\,\frac{x - iy}{1 - u} = \frac{x^2 + y^2}{(1 - u)^2} = \frac{1 - u^2}{(1 - u)^2} = \frac{1 + u}{1 - u}$$

de unde $u = (|z|^2 - 1)/(|z|^2 + 1)$ şi $1 - u = 2/(|z|^2 + 1)$. Deoarece $z + \bar{z} = 2x/(1 - u)$, $z - \bar{z} = 2iy/(1 - u)$, obţinem

$$\Phi^{-1}(z) = (x, y, u) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}\right) \quad \text{pentru} \tag{1.42.}$$

orice $z \in \mathbf{C}$

2) Aplicaţia din propoziţie este continuă în orice punct $s_0(x_0, y_0, u_0) \in S_2 \setminus \{N\} = \dot{S}_2$. Dacă $s_0 \in \dot{S}_2$ atunci

$$\lim_{\dot{S}_2 \ni s \to s_0} z(x, y, u) = \lim_{\dot{S}_2 \ni s \to s_0} \frac{x + iy}{1 - u} = \frac{x_0 + iy_0}{1 - u_0} = z(x_0, y_0, u_0).$$

3) Φ^{-1} este continuă pentru orice $z \in \mathbf{C}$ pentru că evident $\lim \varphi^{-1}(z) = \Phi^{-1}(z_0)$, ceea ce rezultă din continuitatea funcţiilor de z şi $\bar{z}$ din formula (1.42). □

1.43. **Propoziţie.** *Dacă notăm* $N' = (0, 0, -1) \in \mathbf{R}^3$ *şi* $\Phi_1 : S_2 \setminus \{N'\} \to \mathbf{C}$ *e definită* de $\Phi_1(x_1, y, u) = \dfrac{x - iy}{1 + u}$, *atunci* Φ_1 *este un omeomorfism de la* $S_2 \setminus \{N'\}$ *la* $\mathbf{C}$.

Demonstraţia este similară cu cea precedentă, unde N se înlocuieşte cu N'.

1.44. *Interpretarea geometrică a omeomorfismelor* Φ *şi* Φ_1

Punctele N, P, z au respectiv următoarele coordonate: $(0, 0, 1)$, (x, y, u), $(x_1, y_1, 0)$, unde N, P sînt pe S_2 şi z în planul complex. Ecuaţiile dreptei NP sînt $\dfrac{X}{x} = \dfrac{Y}{y} = \dfrac{U - 1}{u - 1}$. Intersectînd dreapta NP cu planul

$U = 0$, atunci $X = x_1$, $Y = y_1$, și avem $\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{-1}{u-1}$, adică $x_1 = \frac{x}{1-u}$ și $y_1 = \frac{y}{1-u}$ sau $z = x_1 + iy_1 = \frac{x+iy}{1-u}$. Deci punctele N, P și $z = (x + iy)/(1-u)$ sînt coliniare și aplicația Φ este o proiecție centrală din centrul $N(0, 0,1)$, cum se vede din figura 1.44. Ea se numește *proiecție stereografică* de centru N de la $S_2\setminus\{N\}$ pe planul complex $\mathbf{C}$. Aplicația Φ_1 se interpretează geometric ca proiecția stereografică de centru N' de la $S_2\setminus\{N'\}$ pe planul complex $\mathbf{C}$. Se vede că pentru orice punct $(x, y, u) \in S_2\setminus\{N, N'\}$ avem $zz' = 1$.

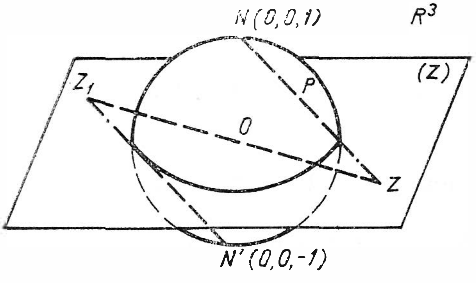


Fig. 1.44

1.45. *Topologizarea lui* $\mathbf{C}_\infty$. La sistemele fundamentale de vecinătăți formate din toate discurile centrate în orice $z \in \mathbf{C}$, adăugăm un sistem fundamental de vecinătăți al punctului de la infinit format din $\{\mathbf{C}_\infty\setminus\overline{U}(0; r), r > 0\} = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbf{C}; |z| > r\}$ cărora le corespund pe S_2 calote deschise centrate în N, generalizări ale discurilor din plan. Acum putem enunța:

1.46. **Propoziție.** *Aplicația* Φ *definită în (1.40) este un omeomorfism de la* S_2 *la* $\mathbf{C}_\infty$.

1) Continuitatea aplicației Φ în (0, 0,1) rezultă din faptul că $|\Phi(x, y, u)| > r > 1$ este echivalentă cu $\left|\frac{x+iy}{1-u}\right|^2 = \frac{1+u}{1-u} > r^2$, adică $|\Phi(x, y, u)| > r > 1 \Leftrightarrow u > \frac{r^2-1}{r^2+1}$. Aceasta arată că $\Phi^{-1}(\mathbf{C}_\infty\setminus\overline{U}(0; r)) = \left\{(x, y, u) \in S_2;\ u > \frac{r^2-1}{r^2+1}\right\}$ adică $\Phi^{-1}(\mathbf{C}_\infty\setminus\overline{U}(0, r))$ este o vecinătate deschisă din S_2 a punctului (0, 0, 1).

Cum $\mathbf{C}_\infty\setminus\overline{U}(0, r)$ este deschisă, Φ^{-1} duce mulțimi deschise dintr-un sistem fundamental de vecinătăți ale punctului de la infinit în mulțimi deschise ale unui sistem fundamental de vecinătăți ale punctului (0, 0,1) $\in S_2$. Deci Φ este continuă pe S_2.

2) Φ^{-1} este continuă și în $z = \infty$, deoarece $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi^{-1}(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right) = (0, 0, 1) = \Phi^{-1}(\infty)$. Evident bicontinuitatea în celelalte puncte este demonstrată în (1.41). □

1.47. Sfera S_2 înzestrată cu omeomorfismele Φ și Φ_1 se numește *sfera lui Riemann*. Se poate arăta că proiecția stereografică duce cercurile de pe S_2 care nu trec prin N (intersecția sferei S_2 cu un plan care nu trece prin N) în cercuri din $\mathbf{C}$ și reciproc. De asemenea, proiecția stereografică aplică cercurile de pe S_2 care trec prin N în drepte din planul complex extins (vezi (1.39)).

1.48. Definim acum distanța între punctele z și z' din $\mathbf{C}_\infty$ ca lungimea coardei PP' în $\mathbf{R}^3$, unde P și P' sînt $\Phi^{-1}(z)$ și $\Phi^{-1}(z')$ Dacă $P(x, y, u)$ și

$P'(x', y', u')$ atunci distanța aceasta, numită *distanță cordală* întrepunctele z, z' și notată cu $\mathbf{d}_c(z, z')$ definește o aplicație $\mathbf{d}_c : \mathbf{C}_\infty \times \mathbf{C}_\infty \to [0,2]$ și avem $\mathbf{d}_c(z, z')^2 = (x-x')^2+(y-y')^2 + (u - u')^2 = 2 - 2(xx' + yy' + uu')$.

Folosind formulele (1.42) pentru x, y, u și x', y', u', obținem $\mathbf{d}_c(z,z') = \dfrac{2|z - z'|}{(1 + |z|^2)^{1/2}(1 + |z'|^2)^{1/2}}$ oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{C}$ și $\mathbf{d}_c(z, \infty) = \dfrac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}$ oricare ar fi $z \in \mathbf{C}$. De aici rezultă că $(\mathbf{C}_\infty, \mathbf{d}_c)$ este un spațiu metric deoarece $\mathbf{d}_c(z, z') = 0 \Leftrightarrow z = z'$, $\mathbf{d}_c(z, z') = \mathbf{d}_c(z', z)$ și $\mathbf{d}_c(z, z') \leqslant \mathbf{d}_c(z, z'') + \mathbf{d}_c(z'', z')$ oricare ar fi $z, z', z'' \in \mathbf{C}_\infty$

Se poate arăta că topologia spațiului metric $(\mathbf{C}_\infty, \mathbf{d}_c)$ coincide cu cea definită la (1.45).

1.49. **Corolar.** *Spațiul metric* $(\mathbf{C}_\infty, \mathbf{d}_c)$ *este compact.*

În adevăr, $S_2 \subset \mathbf{R}^3$ fiind compactă (mărginită și închisă în $\mathbf{R}^3$) și aplicația Φ de la S_2 pe $\mathbf{C}_\infty$ continuă, urmează că $\mathbf{C}_\infty$ este compact pentru că aplicațiile continue păstrează compactitatea.

1.50. *Observații.* Se vede că avem relațiile

$$\mathbf{d}_c\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z'}\right) = \mathbf{d}_c(z, z') \text{ și } \mathbf{d}_c\left(\frac{1}{z}, \infty\right) = \frac{2z}{(1+|z|^2)^{1/2}} \text{ oricare ar fi } z, z' \in \mathbf{C}.$$

Dacă A este o mulțime mărginită din $\mathbf{C}$, *adică* $A \subset U(0, R)$, *atunci* $\dfrac{2|z - z'|}{1 + R^2} \leqslant \mathbf{d}_c(z, z') \leqslant 2|z - z'|$ oricare ar fi $z, z' \in A$.

1.51. Pentru a studia o funcție f într-o vecinătate a punctului ∞ vom considera $g = f \circ k$ unde $k(z) = \dfrac{1}{z}$.

Cum k transformă o vecinătatea lui 0 într-una a lui ∞, prin comportarea lui f la ∞ vom înțelege comportarea lui g în 0.

CAPITOLUL II

FUNCŢII OLOMORFE

§ 1. NOŢIUNEA DE FUNCŢIE COMPLEXĂ

2.1. Dacă $A = [a, b]$ este un interval real atunci prin $\mathrm{f} : [a, b] \to \mathbf{C}$ înţelegem o funcţie care asociază fiecărui punct t din $[a, b]$ un număr complex şi numai unul $\mathrm{f}(t) = \alpha(t) + \mathrm{i}\beta(t)$ din $\mathbf{C}$. Aceste funcţii complexe de o variabilă reală au fost deja folosite în capitolul întîi la definiţia argumentului unui număr complex. Continuitatea şi derivabilitatea lor sînt echivalente cu cele ale perechilor de funcţii reale (α, β) de variabila reală $t \in [a, b]$. Există însă şi proprietăţi care diferă de cele de la funcţii de o variabilă reală. Funcţiile complexe continue de o variabilă reală îşi găsesc utilitatea la noţiunea de drum.

2.2. Dacă A este o mulţime de numere complexe $(A \subset \mathbf{C})$, atunci $\mathrm{f} : A \to \mathbf{C}$ reprezintă o funcţie f definită pe $A \subset \mathbf{C}$ cu valori în $\mathbf{C}$, adică o funcţie complexă de o variabilă complexă.

Dacă z este un element din A, atunci valoarea lui f în z se notează cu $\mathrm{f}(z)$ şi funcţia se mai notează prin $z \mapsto \mathrm{f}(z)$. Valoarea funcţiei complexe în z se poate scrie

$$\mathrm{f}(z) = \mathrm{u}(z) + \mathrm{i}\mathrm{v}(z),$$

unde $\mathrm{u}(z)$ şi $\mathrm{v}(z)$ sînt numere reale şi astfel $z \mapsto \mathrm{u}(z)$, $z \mapsto \mathrm{v}(z)$ sînt funcţii reale. Numim u *partea reală a funcţiei* f *şi* v *partea imaginară a lui* f şi notăm $\mathrm{u} = \mathbf{Re}\,\mathrm{f}$, $\mathrm{v} = \mathbf{Im}\,\mathrm{f}$.

Deoarece $z = x + \mathrm{i}y$, unde x şi y sînt numere reale, atunci putem scrie

$$\mathrm{w} = \mathrm{f}(z) = \mathrm{f}(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{u}(x, y) + \mathrm{i}\mathrm{v}(x, y),$$

considerînd u şi v ca funcţii de două variabile reale x şi y. Funcţia f se interpretează geometric ca o transformare punctuală a unei mulţimi din planul (z) în planul (w).

2.3. Pentru funcţiile complexe de o variabilă complexă existenţa derivatei pe o mulţime deschisă G este o condiţie mai restrictivă decît cea relativă la funcţiile complexe de o variabilă reală ; ea are implicaţii profunde în proprietățile de structură ale funcțiilor. Cercetarea consecințelor existenței derivatei constituie tema centrală a analizei complexe.

2.4. Pentru o funcție complexă derivabilă pe o mulțime deschisă $G \subset \mathbf{C}$ vom adopta denumirea de funcție *olomorfă* pe G. Se va arăta că orice funcție olomorfă pe un domeniu D este restricția la D a unei funcții analitice globale (vezi Capitolul VII).

§ 2. LIMITE ŞI CONTINUITATE

2.5. **Definiție.** Se spune că funcția $\mathrm{f} : A \to \mathbf{C} (A \subset \mathbf{C})$ are limita l în punctul a, și se scrie $\lim\limits_{z \to a} \mathrm{f}(z) = l$, dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta > 0$ cu proprietatea că

$$z \in A,\ 0 < |z - a| < \eta \Rightarrow |\mathrm{f}(z) - l| < \varepsilon.$$

Există variante obișnuite ale definiției care corespund cazului cînd a sau l este infinit. În cazul complex sînt mai puține variante de acest fel din cauză că există un singur punct la infinit. Se mențin toate rezultatele privind limita unei sume, a unui produs sau a unui cît cînd numitorul este diferit de zero, ca la funcții reale de o variabilă reală.

Condiția $\lim\limits_{z \to a} \mathrm{f}(z) = l$ este echivalentă evident cu $\lim\limits_{z \to a} \overline{\mathrm{f}(z)} = \bar{l}$. Din acestea urmează că $\lim\limits_{z \to a} \mathrm{f}(z) = l$ este echivalentă cu $\lim\limits_{z \to a} \mathbf{Re}\, \mathrm{f}(z) = \mathbf{Re}\, l$ și $\lim\limits_{z \to a} \mathbf{Im}\, \mathrm{f}(z) = \mathbf{Im}\, l$.

2.6. O funcție $\mathrm{f} : A \to \mathbf{C}$ se numește continuă în $z_0 \in A \subset \mathbf{C}$ dacă $\lim\limits_{z \to z_0} \mathrm{f}(z) = \mathrm{f}(z_0)$. Dacă f este continuă în toate punctele lui A, atunci spunem că f este continuă pe A.

Suma și produsul a două funcții continue sînt continue, cîtul a două funcții continue este o funcție continuă în $z_0 \in A$ dacă numitorul este diferit de zero în z_0.

Continuitatea lui f este echivalentă cu continuitatea funcțiilor $\mathbf{Re}\, \mathrm{f}$ și $\mathbf{Im}\, \mathrm{f}$. De asemenea continuitatea funcției f implică continuitatea funcției $|\mathrm{f}|$, deoarece din formula (1.12), scrisă pentru $\mathrm{f}(z)$ și $\mathrm{f}(z_0)$ obținem $||\mathrm{f}(z)| - |\mathrm{f}(z_0)|| \leqslant |\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(z_0)|$.

Limitele și continuitatea pentru funcții pot fi definite și prin șiruri deoarece $\mathbf{C}$ are proprietatea că fiecare punct are un sistem fundamental numărabil de vecinătăți format din discuri centrate în acest punct.

§ 3. DRUMURI ÎN C

2.7. **Definiții.** *Un drum în* $\mathbf{C}$ este o aplicație continuă γ a segmentului $[0,1]$ în $\mathbf{C}$. Punctul $\gamma(0)$ se numește *punctul inițial* al drumului iar $\gamma(1)$ se numește *punctul final* sau *punctul terminal* al drumului, $\gamma([0,1])$, imaginea segmentului $[0,1]$ prin γ, se numește *suportul* drumului γ și se notează cu $\{\gamma\}$, unde $\{\gamma\} = \{\gamma(t) \in \mathbf{C} : t \in [0,1]\}$.

Dacă $\gamma(0) = \gamma(1)$, spunem că drumul γ este *închis*. Un drum închis frecvent folosit este drumul circular γ definit prin $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$ şi pe care îl vom nota cu $\delta U(z_0 ; r)$. Vom nota cu $\mathscr{D}(z_1, z_2)$ mulţimea tuturor drumurilor din $\mathbf{C}$ cu punctul iniţial z_1 şi punctul final z_2.

Un *drum* γ *în* G ($G \subset \mathbf{C}$) se defineşte în mod analog înlocuind $\mathbf{C}$ prin G. Se numeşte *deformaţie continuă* (în sens larg) a drumului $\gamma_1 : [0,1] \to G$ în drumul $\gamma_2 : [0,1] \to G$ o aplicaţie continuă $\varphi : S \times T \to G$ astfel încît $S = T = [0, 1]$ şi $\varphi(0, t) = \gamma_1(t)$, $\varphi(1, t) = \gamma_2(t)$ pentru $t \in [0,1]$. În acest caz, fiecare $s \in [0,1]$ defineşte un drum $\gamma_s : [0,1] \to G$, adică $\gamma_s(t) = \varphi(s, t)$. Fie γ_1 şi γ_2 două drumuri din mulţimea drumurilor în G. Spunem că drumul γ_1 este omotop în sens larg cu drumul γ_2 în G şi scriem $\gamma_1 \overset{l}{\underset{G}{\sim}} \gamma_2$ dacă există o deformaţie continuă în G a lui γ_1 în γ_2. Relaţia „$\overset{l}{\underset{G}{\sim}}$" se numeşte *relaţie de omotopie în* G (*în sens larg*).

2.8. **Propoziţie.** *Relaţia de omotopie în sens larg este o relaţie de echivalenţă.* Ea este reflexivă, deoarece dacă γ este un drum din G, atunci $\varphi : S \times T \to G$ definită prin $\varphi(s, t) = \gamma(t)$, este o deformaţie continuă a lui γ în γ.

Relaţia de omotopie este simetrică întrucît dacă γ_1 şi γ_2 aparţin mulţimii drumurilor din G şi φ este o deformaţie continuă a lui γ_1 în γ_2 atunci $\varphi_1 : S \times T \to G$ definită prin $\varphi_1(s, t) = \varphi(1-s, t)$ este o deformaţie continuă a lui γ_2 în γ_1.

Relaţia de omotopie este tranzitivă deoarece, dacă γ_1, γ_2, γ_3 sînt trei drumuri din mulţimea drumurilor din G iar φ_1 (respectiv φ_2) este o deformaţie continuă a lui γ_1 în γ_2 (respectiv γ_2 în γ_3), atunci aplicaţia $\varphi : S \times T \to G (S = T = [0,1])$ definită prin

$$\varphi(s, t) = \begin{cases} \varphi_1(2s, t) & \text{dacă } s \in [0, 1/2], \\ \varphi_2(2s - 1, t) & \text{dacă } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

este o deformaţie continuă a lui γ_1 în γ_3. □

2.8.1. Mulţimea drumurilor γ din G care au *extremităţile fixe* z_1 *şi* z_2 (punctul iniţial z_1 şi punctul final z_2, evident $z_1, z_2 \in G$) se va nota cu $\mathscr{D}_G(z_1, z_2)$.

Dacă $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{D}_G(z_1, z_2)$, atunci $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_1$ şi $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = z_2$ şi, prin definiţie, γ_1 *este omotop cu* γ_2 în G şi notăm $\gamma_1 \underset{G}{\sim} \gamma_2$ dacă există o deformaţie continuă φ a lui γ_1 în γ_2, definită în $S \times T$ cu valori în G astfel încît $S = T = [0, 1]$, cu $\varphi(0, t) = \gamma_1(t)$, $\varphi(1, t) = \gamma_2(t)$ pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$ şi $\varphi(s, 0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\varphi(s, 1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, altfel spus, pentru orice $s \in [0, 1]$, drumul $\gamma_s : [0, 1] \to G$ are aceleaşi extremităţi ca drumurile γ_1 şi γ_2.

Se arată că şi relaţia de omotopie „$\underset{G}{\sim}$" este relaţie de echivalenţă (ca în propoziţia (2.8)).

2.9. **Definiţie.** Dacă $\gamma_1 \in \mathscr{D}(z_1, z_2)$, $\gamma_2 \in \mathscr{D}(z_2, z_3)$, drumul notat cu $\gamma_1 \cup \gamma_2$ definit prin

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{dacă } t \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{dacă } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

se numeşte compunerea drumului γ_1 *cu drumul* γ_2. Evident $\gamma_1 \cup \gamma_2 \in \mathscr{D}(z_1, z_3)$ iar $\gamma_2 \cup \gamma_1$ are sens numai dacă punctul final al drumului γ_2 coincide cu punctul inițial al drumului γ_1. Deci, în general, operația „$\cup$” nu este comutativă și nici asociativă.

2.10. **Definiție.** Dacă $\gamma_1 \in \mathscr{D}(z_1, z_2)$, $\gamma_2 \in \mathscr{D}(z_2, z_3)$, $\ldots$, $\gamma_n \in \mathscr{D}(z_n, z_{n+1})$, atunci, prin definiție, $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n$ este drumul γ definit prin $\gamma(t) = (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_k \cup \ldots \cup \gamma_n)(t) = \{\gamma_{k+1}(nt - k)$, pentru $t \in [k/n, (k+1)/n]$; $k \in \overline{0, n-1}\}$.

2.11. **Definiție.** Fie γ un drum și $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ o diviziune a lui $[0, 1]$. Sistemul de drumuri $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ se numește descompunerea lui γ asociată diviziunii Δ, unde $\gamma_k = \gamma \circ h_k$ și pentru fiecare $k \in \overline{1, n}$, $h_k : [0, 1] \to [t_{k-1}, t_k]$ este omeomorfismul liniar crescător definit prin $h_k(t) = t_{k-1} + t(t_k - t_{k-1})$. Se vede că $\{\gamma_k\} = (\gamma \circ h_k)([0, 1]) = \gamma([t_{k-1}, t_k])$.

2.12. **Lemă.** *Dacă γ este un drum în G și f o aplicație continuă a segmentului $[0,1]$ pe el însuși, astfel încît $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$ atunci drumul $\gamma_1 = \gamma \circ f$ este omotop cu drumul γ.* Se vede că $\varphi : S \times T \to \mathbf{C}$, $S = T = [0, 1]$ definită prin $\varphi(s, t) = \gamma[t + s(\mathrm{f}(t) - t)]$ este o deformație continuă a lui γ în γ_1. □

2.13. **Propoziție.** *Dacă γ este un drum din G și $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ este o descompunere a lui γ, atunci drumul γ este omotop în G cu drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n$.*

Fie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ diviziunea Δ a lui $[0, 1]$ care a generat descompunerea $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Notînd cu h_k omeomorfismul liniar crescător al segmentului $[0, 1]$ în $[t_{k-1}, t_k]$ definit prin $h_k(t) = t_{k-1} + t(t_k - t_{k-1})$ avem $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n = \gamma \circ (h_1 \cup h_2 \cup \ldots \cup h_n)$. Notînd cu $h = h_1 \cup h_2 \cup \ldots \cup h_n$ avem $h(0) = h_1(0) = 0$, $h(1) = h_n(1) = 1$ și $h([0, 1]) = [0, 1]$. Așadar h este o aplicație continuă a segmentului $[0, 1]$ în el însuși și avem ca în (2.12), $\gamma \underset{G}{\sim} \gamma \circ h = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n$. □

2.14. **Propoziție.** *Dacă $\gamma_1 \in \mathscr{D}_G(z_1, z_2)$, $\gamma_2 \in \mathscr{D}_G(z_2, z_3)$, $\gamma_3 \in \mathscr{D}_G(z_3, z_4)$ atunci avem $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \cup \gamma_3 \underset{G}{\sim} \gamma_1 \cup (\gamma_2 \cup \gamma_3)$.* Fie h omeomorfismul crescător al segmentului $[0,1]$ pe $[0,1]$ definit prin $h(t) = 2t$ pentru $t \in [0,1/4]$, $h(t) = t + 1/4$ pentru $t \in [1/4, 1/2]$, $h(t) = (1+t)/2$ dacă $t \in [1/2, 1]$. Se verifică simplu relațiile

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2) \cup \gamma_3 = [\gamma_1 \cup (\gamma_2 \cup \gamma_3)] \circ \mathrm{h} \underset{G}{\sim} (\gamma_1 \cup \gamma_2) \cup \gamma_3. \ \square$$

2.15. **Definiție.** Dacă $\gamma \in \mathscr{D}_G(z_1, z_2)$, atunci notăm cu γ^- drumul definit prin $\gamma^-(t) = \gamma(1 - t)$. Drumul γ^- se numește *inversul drumului* γ.

Propoziție. Dacă $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{D}_G(z_1, z_2)$ cu $\gamma_1 \underset{G}{\sim} \gamma_2$, atunci $\gamma_1^- \underset{G}{\sim} \gamma_2^-$. Dacă φ este o deformație continuă de la γ_1 la γ_2, atunci aplicația $\varphi^- : S \times T \to G$, definită prin $\varphi^-(s, t) = \varphi(s, 1 - t)$ este o deformație continuă a lui γ_1^- în γ_2^-. Deci $\gamma_1^- \underset{G}{\sim} \gamma_2^-$. □

2.16. **Definiție.** Pentru orice $z \in G$ se notează prin e_z drumul definit prin $\mathrm{e}_z(t) = z$. Evident $\mathrm{e}_z \in \mathscr{D}_G(z, z)$. Un drum $\gamma \in \mathscr{D}_G(z, z)$ se numește *omotop cu zero* în G dacă $\gamma \underset{G}{\sim} \mathrm{e}_z$ (γ omotop cu un drum punctual z).

Propoziție. *Pentru orice $\gamma \in \mathscr{D}_G(z, z)$ avem $\mathrm{e}_z \cup \gamma \underset{G}{\sim} \gamma$.* Dacă $\mathrm{f} : [0,1] \to [0,1]$ este definită prin $\mathrm{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t \in [0, 1/2], \\ 2t - 1 & \text{dacă } t \in [1/2, 1], \end{cases}$ atunci f este continuă și avem $\mathrm{e}_z \cup \gamma = \gamma \circ \mathrm{f}$. Din (2.12) urmează $\mathrm{e}_z \cup \gamma \underset{G}{\sim} \gamma$. □

2.17. **Propoziţie.** *Dacă* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{D}_G(z_1, z_2)$ *şi* $\gamma_1 \underset{G}{\sim} \gamma_2$, *atunci drumul* $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ *este omotop cu zero în* G.

$$\varphi(s, t) = \begin{cases} \gamma_1(2ts) \text{ dacă } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2(1-t)s) \text{ dacă } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

este o deformaţie continuă a drumului e_{z_1} în $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$. Prin urmare $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ este omotop cu zero în G. □

2.18. Printre drumurile $\mathscr{D}(z_1, z_2)$ se găseşte drumul dat de aplicaţia $t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$ al cărui suport este segmentul $[z_1, z_2]$. El se numeşte *drumul liniar* din $\mathscr{D}(z_1, z_2)$, sau drumul liniar de la z_1 la z_2. Un drum γ pentru care există o descompunere formată din drumuri liniare se numeşte *drum poligonal.* O mulţime A se numeşte *poligonal conexă* dacă oricare ar fi $z_1, z_2 \in A$ există un drum poligonal $\gamma \in \mathscr{D}(z_1, z_2)$ astfel încît $\{\gamma\} \subset A$.

2.19. **Propoziţie.** *Orice domeniu* D *este poligonal conex.* Fie z_0 un punct oarecare din D şi să notăm cu G_{z_0} mulţimea punctelor $z \in D$ astfel încît există un drum poligonal γ în D inclus în $\mathscr{D}(z_0, z)$. Mulţimea G_{z_0} este deschisă căci dacă $z \in G_{z_0} \subset D$, există $U(z, r) \subset D$. Dumul liniar $\gamma_1 \in \mathscr{D}(z, z')$, pentru orice $z' \in U(z, r)$, este din $U(z, r)$ şi $\gamma \cup \gamma_1$ este în D. Deci pentru orice $z \in G_{z_0}$ există $U(z, r) \subset G_{z_0}$, adică G_{z_0} este mulţime deschisă şi nevidă. Dacă $(z_n) \subset G_{z_0}$ este convergent la $z \in D$, atunci pentru un anumit $\varepsilon > 0$ există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $z_n \in U(z, \varepsilon) \subset D$. Dacă notăm cu γ_n drumul poligonal în D din $\mathscr{D}(z_0, z_n)$ şi cu γ drumul liniar din $\mathscr{D}(z_n, z)$, atunci drumul $\gamma_n \cup \gamma$ este în D deci $z \in G_{z_0}$ şi, prin urmare, G_{z_0} este şi închisă în D. G_{z_0} fiind simultan deschisă şi închisă în domeniul D care este conex, urmează $G_{z_0} = D$. □

Aceeaşi demonstraţie arată că orice domeniu D din $\mathbf{C}$ este conex prin drumuri sau arce.

2.20. **Definiţie.** Un domeniu D se numeşte *simplu conex* dacă orice drum închis din D este omotop cu zero în D.

2.21. **Propoziţie.** *Dacă* D *este un domeniu din* $\mathbf{C}$ *stelat în raport cu unul din punctele sale, atunci* D *este simplu conex.*

Dacă D este stelat în raport cu $z_0 \in D$, atunci pentru orice drum $\gamma \in \mathscr{D}_D(z_0, z_0)$ considerăm aplicaţia $\varphi : S \times T \to D$, cu $S = T = [0,1]$ definită prin $\varphi(s, t) = z_0 + s[\gamma(t) - z_0]$. Se vede că φ este o deformaţie continuă în D a drumului γ în drumul e_{z_0}. Dacă $z \in D$, atunci drumul închis $\gamma \cup \lambda \cup \lambda^-$, unde λ este drumul liniar de la z la z_0, este situat în D. Aşadar γ este omotop cu zero în D. □

2.22. **Definiţie.** Fie γ_1 şi γ_2 două drumuri din $\mathbf{C}$. Spunem că „γ_1 *este echivalent cu* γ_2" dacă există un omeomorfism crescător h al intervalului $[0,1]$ pe $[0,1]$ astfel încît $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$.

Evident că două drumuri echivalente au acelaşi suport. Reciproca acestei afirmaţii nu este însă adevărată. În adevăr, drumurile γ_1 şi γ_2 definite prin $\gamma_1(t) = t$ şi $\gamma_2(t) = t(2t - 1)^2$ sînt două drumuri din $\mathscr{D}(0,1)$ care au ca suport comun segmentul $[0,1]$. Ele nu sînt însă echivalente, deoarece funcţia $t \mapsto t(2t - 1)^2$ nu este bijectivă.

Se observă că relaţia definită mai sus este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, deci este o relaţie de echivalenţă, care va determina o împărţire în clase a tuturor drumurilor din $\mathbf{C}$.

Numim *curbă* o clasă de drumuri echivalente, iar prin suportul unei curbe vom înţelege suportul unui drum oarecare din această clasă.

§ 4. FUNCŢII COMPLEXE DERIVABILE DE O VARIABILĂ REALĂ

Cazul unei funcţii complexe de o variabilă reală derivabilă pe un interval $[a, b]$, pe care l-am întîlnit chiar din capitolul întîi şi de care avem nevoie şi mai tîrziu, se reduce la cazul real. Dacă funcţia $\mathrm{f} : [a, b] \to \mathbf{C}$ este definită prin $\mathrm{f}(t) = \alpha(t) + \mathrm{i}\beta(t)$, atunci notînd prin $\mathrm{f}'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(t_0)}{t - t_0}$, dacă limita există, rezultă $\mathrm{f}'(t) = \alpha'(t) + \mathrm{i}\beta'(t)$ pentu $t \in [a, b]$. Existenţa lui f' este echivalentă cu existenţa simultană a derivatelor α' şi β'. Notaţia complexă are nu numai avantaje formale.

2.23. **Teoremă.** *Dacă $\mathrm{f} : [a, b] \to \mathbf{C}$ este derivabilă pe $[a, b]$ şi $\mathrm{f}'(t) = 0$ pentru orice $t \in [a, b]$ (derivabilă la dreapta în a şi derivabilă la stînga în b) atunci f este o constantă pe $[a, b]$.*

În adevăr, $\mathrm{f}'(t) = 0 \Leftrightarrow \alpha'(t) = \beta'(t) = 0$ pentru orice $t \in [a, b]$, ceea ce implică $\alpha(t) = c_1$, $\beta(t) = c_2$ pentru orice $t \in [a, b]$. Deci $\mathrm{f}(t) = c_1 + \mathrm{i}c_2$ (o constantă complexă) pentru orice $t \in [a, b]$. □

2.24. *Observaţie. Teorema creşterilor finite a lui Lagrange nu este adevărată pentru toate funcţiile complexe de o variabilă reală.* În adevăr dacă ea ar fi adevărată pentru $\mathrm{f}(t) = t^2 + \mathrm{i}t^3$ în intervalul $[a, b]$ cu $a < b$ atunci $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a) = \mathrm{f}'(c)(b - a)$ cu $c \in]a, b[$, adică $b^2 + \mathrm{i}b^3 - a^2 - \mathrm{i}a^3 = (2c + 3c^2\mathrm{i})(b - a)$. Egalînd părţile reale şi complexe obţinem $b^2 - a^2 = 2c(b - a)$, $b^3 - a^3 = 3c^2(b - a)$ sau $b + a = 2c$, $a^2 + ab + b^2 = 3c^2$, de unde eliminînd pe c obţinem $a^2 + ab + b^2 = 3\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2$ sau $(a - b)^2 = 0$, ceea ce conduce la $a = b$, ce contrazice ipoteza $a < b$. □

Totuşi există două variante mai slabe pentru teorema creşterilor finite a lui Lagrange date în teorema următoare:

2.25. **Teoremă.** *Dacă $[a, b]$ este un interval din $\mathbf{R}$ şi f o funcţie complexă pe $[a, b]$ continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe $]a, b[$, atunci există un punct $c \in]a, b[$ şi un număr complex σ cu $|\sigma| \leqslant 1$ astfel încît:*

1) $$|\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)| \leqslant |\mathrm{f}'(c)|\,(b - a) \quad \text{şi}$$

2) $$\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a) = \sigma \mathrm{f}'(c)(b - a).$$

Considerăm funcţia reală φ pe intervalul $[a, b]$ definită prin $\varphi(t) = l\alpha(t) + m\beta(t)$, unde $l = \mathbf{Re}[\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)]$, $m = \mathbf{Im}[\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)]$, $\alpha = \mathbf{Re}\,\mathrm{f}$, $\beta = \mathbf{Im}\,\mathrm{f}$. Evident φ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe $]a, b[$. Aplicînd teorema creşterilor finite, rezultă că există $c \in]a, b[$, astfel încît

2.25.1. $\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\,\varphi'(c)$.

Deoarece $\varphi(b) - \varphi(a) = l[\alpha(b) - \alpha(a)] + m[\beta(b) - \beta(a)]$, iar $l = \alpha(b) - \alpha(a)$, $m = \beta(b) - \beta(a)$, obţinem $\varphi(b) - \varphi(a) = |\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)|^2$. Întrucît $\varphi'(c) = l\alpha'(c) +$

$+ m\beta'(c)$, aplicînd inegalitatea lui Schwarz deducem $|\varphi'(c)| \leqslant \sqrt{l^2 + m^2} \cdot \sqrt{[\alpha'(c)]^2 + [\beta'(c)]^2} = |f(b) - f(a)||f'(c)|$. Deci

$$|f(b) - f(a)|^2 = \varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\varphi'(c) \leqslant (b - a)|f(b) - f(a)||f'(c)|,$$

de unde prin simplificare cu $|f(b) - f(a)| > 0$ obținem formula 1). În cazul $f(b) = f(a)$ formula 1) rămîne valabilă. Din formula 1) urmează $\left|\frac{f(b) - f(a)}{f'(c)}\right| \frac{1}{b - a} \leqslant 1$.

Să notăm numărul din membrul întîi cu τ. τ este real $\leqslant 1$. Atunci

$$\frac{f(b) - f(a)}{f'(c)} \frac{1}{b - a} = \tau (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Dacă notăm cu σ numărul complex din membrul doi, obținem $f(b) - f(a) = \sigma f'(c)(b - a)$ cu τ complex și $|\sigma| = \tau \leqslant 1$. □

Observație. Pentru determinarea numerelor c din teorema (2.25) se folosește ecuația (2.25.1).

Determinarea numărului σ se obține din relația 2) din (2.25). Un calcul simplu pentru exemplul din (2.24) în cazul $a = -1$, $b = 1$ dă $c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\gamma'\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} + i$ și $\sigma = \frac{3}{7} \pm \frac{2\sqrt{3}}{7} i$ cu $|\sigma| = \frac{\sqrt{21}}{7} < 1$. Deci pentru $f(t) = t^2 + it^3$ și intervalul $[-1,1]$, formula 2) pentru cele două valori ale lui c și cele două valori respective pentru σ dă identitățile $2i = \left(\frac{3}{7} \pm \frac{2\sqrt{3}}{7} i\right)\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}} + i\right) 2$.

§ 5. DERIVATA UNEI FUNCȚII COMPLEXE DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Pentru funcția $f : G \to \mathbf{C}$, unde G este deschisă în $\mathbf{C}$, notăm **Re** f și **Im** f cu u și v, deci $f = u + iv$. Dacă $z = x + iy \in G$, vom scrie $f(z) = u(z) + iv(z)$, sau $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Funcția f poate fi privită ca o funcție complexă de două variabile reale, sau ca o funcție complexă de o variabilă complexă.

2.26. **Definiție.** O funcție complexă $f : G \to \mathbf{C}$, cu G deschisă în $\mathbf{C}$, se numește **R**-*diferențiabilă* (sau diferențiabilă în sensul analizei reale) în punctul $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ dacă există două numere complexe A_1 și A_2 și o funcție complexă $f_1 : G \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ astfel încît $\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) = 0$ și pentru orice $z = x + iy \in G \setminus \{z_0\}$ să avem

2.26.1. $f(z) = f(z_0) + A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0) + f_1(z)\,|z - z_0|$.

Se observă imediat că dacă f este **R**-diferențiabilă în $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, atunci f are derivate parțiale de ordinul întîi în z_0 și ele sînt egale respectiv cu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = A_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = A_2.$$

Se arată ușor că funcția f este **R**-diferențiabilă în $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ dacă și numai dacă funcțiile reale u și v sînt diferențiabile în punctul (x_0, y_0).

2.27. **Definiție.** O funcție complexă $f : G \to \mathbf{C}$, cu G deschisă în **C**, se numește *derivabilă* în punctul $z_0 \in G$ dacă funcția $z \mapsto [f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$, definită pe $G \setminus \{z_0\}$, are limită în **C** în punctul z_0. Această limită, dacă există, se numește *derivata* lui f în punctul z_0 și se notează cu $f'(z_0)$.

2.28. **Definiție.** O funcție complexă $f : G \to \mathbf{C}$, cu G deschisă în **C**, se numește *diferențiabilă* (sau **C**-diferențiabilă, sau încă diferențiabilă în sensul analizei complexe) în punctul $z_0 \in G$ dacă există un număr complex α și o funcție complexă f_1 pe $G \setminus \{z_0\}$ astfel încît $\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) = 0$ și pentru orice $z = x + iy \in G \setminus \{z_0\}$ să avem

$$2.29.\quad f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + f_1(z)(z - z_0).$$

2.29.1. *Observație.* Se vede ușor că, luînd :

$$f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0) - A_1(x - x_0) - A_2(y - y_0)}{|z - z_0|} & \text{dacă } z \in G \setminus \{z_0\}, \\ 0 & \text{dacă } z = z_0, \text{ respectiv} \end{cases}$$

$$f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \alpha & \text{dacă } z \in G \setminus \{z_0\} \\ 0 & \text{dacă } z = z_0, \end{cases}$$

se obțin definiții echivalente cu cele date în 2.26 și 2.28 de diferențiabilitate, astfel încît f_1 să fie continue în z_0 și $f_1(z_0) = 0$.

2.30. **Propoziție** (de caracterizare pentru funcțiile derivabile). *O funcție* $f : G \to \mathbf{C}$, *unde* G *este deschisă în* **C**, *este derivabilă în* $z_0 \in G$, *dacă și numai dacă* f *este diferențiabilă în* z_0.

Necesitatea. Dacă f este derivabilă în $z_0 \in G$ și fie α derivata lui f în z_0. Notăm cu f_1 funcția definită pe G prin

$$f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \alpha & \text{pentru } z \neq z_0, \\ 0 & \text{pentru } z = z_0. \end{cases}$$

Se vede că f_1 este continuă in z_0, $\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) = 0$ și satisface, pentru orice $z \in G$, relația (2.29).

Suficiența. Dacă f este diferențiabilă în $z_0 \in G$, atunci pentru orice $z \in G$ avem relația (2.29), din care obținem $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \alpha + f_1(z)$. Deoarece $\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) = 0$, urmează că f este derivabilă în z_0 și avem $f'(z_0) = \alpha$. ☐

2.31. **Teorema lui Cauchy-Riemann** (de caracterizare pentru funcțiile derivabile). *O funcție* $f = u + iv : G \to \mathbf{C}$, *unde* G *este deschisă în* **C**, *este derivabilă în* $z_0 \in G$ *dacă şi numai dacă funcţia complexă* f *este* **R**-*diferenţiabilă în punctul* $z_0 \in G$ *şi derivatele parţiale ale funcţiilor reale* u *şi* v *de variabilele* x *şi* y *satisfac relaţiile :*

$$2.32. \quad \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Necesitatea. Dacă f este derivabilă în $z_0 \in G$, atunci, conform propoziţiei (2.30), f este diferenţiabilă în z_0, adică există un număr $\alpha \in \mathbf{C}$ şi o funcţie f_1 continuă în z_0 cu $f_1(z_0) = 0$ astfel încît să avem (2.29) sau, punînd în evidenţă că $f = u + iv$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $f_1 = u_1 + iv_1$ şi $z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0)$ şi egalînd părţile reale şi imaginare în (2.29), obţinem

$$2.33. \quad u(z) = u(z_0) + \alpha_1(x - x_0) - \alpha_2(y - y_0) + u_1(z)(x - x_0) - v_1(z)(y - y_0),$$

$$2.34. \quad v(z) = v(z_0) + \alpha_2(x - x_0) + \alpha_1(y - y_0) + v_1(z)(x - x_0) + u_1(z)(y - y_0),$$

unde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, $f_1 = u_1 + iv_1$, u_1, v_1 sînt continue în z_0 cu $u_1(z_0) = v_1(z_0) = 0$, unde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, $f_1 = u_1 + iv_1$, $\lim u_1(z) = \lim v_1(z) = 0$ şi

$$f_1(z) = \left[\frac{u_1(z)(x - x_0)}{|z - z_0|} - \frac{v_1(z)(y - y_0)}{|z - z_0|}\right]|z - z_0|$$

respectiv,

$$f_1(z) = \left[\frac{v_1(z)(x - x_0)}{|z - z|} - \frac{u_1(z)(y - y_0)}{|z - z_0|}\right]|z - z_0|,$$

adică u şi v sînt **R**—diferenţiabile în z_0 din G.

Din relaţiile (2.33) şi (2.34) urmează că u şi v sînt **R**—diferenţiabile în (x_0, y_0) şi $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \alpha_1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\alpha_2$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_2$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_1$, din care rezultă condiţiile (2.32).

Suficienţa. Dacă u şi v sînt **R**-diferenţiabile în $z_0 \in G$ şi derivatele lor parţiale de ordinul întîi satisfac relaţiile (2.32), atunci există $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$ şi funcţiile u_1, u_2, v_1, v_2 cu limitele zero în $z = z_0$ astfel încît pentru orice $z \in G \setminus \{z_0\}$ avem

$$u(z) = u(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(y - y_0) + u_1(x, y)\,|z - z_0|,$$

$$v(z) = v(z_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)(y - y_0) + v_1(x, y)\,|z - z_0|.$$

Înmulţind relaţia a doua cu i, ţinînd cont de relaţiile (2.32), obţinem

$$2.35. \quad f(z) = f(z_0) + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right](z - z_0) + \frac{[u_1(x, y) + iv_1(x, y)]\,|z - z_0|}{z - z_0}\cdot$$

$\cdot (z - z_0)$, unde u_1, v_1 sînt continue în z_0 şi $u_1(z_0) = v_1(z_0) = 0$. Prin urmare funcţia f_1 definită prin $f_1(z) = \frac{u_1(z) + iv_1(z)}{z - z_0}|z - z_0|\ (|z - z_0|/(z - z_0))$ este un număr complex de modul 1 deci $\neq 0$) are proprietățile că f_1 are $\lim\limits_{z \to z_0} |f_1|(z) = 0$.

Înlocuind $x - x_0$ și $y - y_0$ cu $\frac{1}{2}[(z - z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0)]$ respectiv $\frac{1}{2i}[(z - z_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0)]$ în formula (2.35) urmează

2.36. $f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(z - z_0) + f_1(z)(z - z_0)$ cu f_1 continuă în z_0 și $f_1(z_0) = 0$. Deci f este diferențiabilă în $z_0 \in G$ și prin propoziția (2.30) f este derivabilă în z_0 și $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$. □

2.37. *Observație.* Existența derivatelor parțiale de ordinul întîi pentru funcția f în punctul z_0 este implicată de diferențiabilitatea funcțiilor $u = \mathbf{Re}\, f$ și $v = \mathbf{Im}\, f$ în $z_0 \in G$. Egalitățile (2.32) se numesc *relațiile Cauchy-Riemann*.

2.38. *Observație.* Din relațiile Cauchy-Riemann obținem pentru funcția f derivabilă în $z_0 \in G$, următoarele expresii pentru $f'(z_0)$, formal diferite :

2.38.1. $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Pentru modulul derivatei avem următoarele cinci expresii :

2.39. $|f'|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$, toate derivatele și derivatele parțiale fiind considerate în punctul $z_0 \in G$. Ultima expresie arată că $|f'(z_0)|^2$ este jacobianul funcțiilor u și v în raport cu x și y în z_0.

2.40. *Observație.* Dacă notăm $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$ și $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$, se vede imediat că relațiile Cauchy-Riemann sînt echivalente cu relația $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. În adevăr, această egalitate este echivalentă cu $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) + i\left[\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right] = 0$ și egalînd părțile reale și imaginare cu zero obținem echivalența cu relațiile Cauchy-Riemann. În acest caz avem $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

2.41. *Observație.* Se vede imediat că $\bar{f} = u - iv$ este derivabilă în $z_0 \in G$ dacă și numai dacă funcțiile reale u și v definite pe mulțimea deschisă $G \subset \mathbf{C}$ sînt diferențiabile în z_0 și satisfac condiția $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

2.42. *Observație*. Rezultă, ca și în cazul real, că: 1) orice funcție $f : G \to \mathbf{C}$ derivabilă în $z_0 \in G$ este continuă în z_0.

2) Dacă f, g sînt funcții complexe pe G și derivabile în $z_0 \in G$, atunci $f + g$ și fg sînt de asemenea derivabile în z_0 și au loc relațiile $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)$.

3) Dacă f și g sînt derivabile în $z_0 \in G$ și $g(z_0) \neq 0$, atunci f/g este derivabilă în z_0 și avem $(f/g)'(z_0) = [f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)]/g^2(z_0)$. În adevăr, diferențiabilitatea lui g în z_0 asigură continuitatea lui $|g|$ în z_0 și existența unui disc $U(z_0\,;r)$ astfel încît $|g(z)| > |g(z_0)| - \varepsilon > 0$ pentru orice $z \in U(z_0\,;r)$.

4) *Dacă G_1 și G_2 sînt submulțimi deschise din* $\mathbf{C}$ *și* $f_1 : G_1 \to G_2$, $f_2 : G_2 \to \mathbf{C}$ *două funcții complexe*, z_0 *un punct din* G_1 *și* $z_1 = f_1(z_0)$ *un punct din* G_2 *și dacă* f_1, f_2 *sînt derivabile în* z_0 *respectiv* z_1, *atunci* $f_2 \circ f_1$ *este derivabilă în* z_0 *și avem*

2.43 $(f_2 \circ f_1)'(z_0) = f_2'(z_1)\, f_1'(z_0) = (f_2' \circ f_1)(z_0)\, f_1'(z_0)$.

Funcțiile f_1 și f_2 fiind derivabile în z_0 și z_1 respectiv din propoziția (2.30) urmează că sînt diferențiabile în z_0 și z_1 și deci există două funcții $g_1 : G_1 \to G_2$, $g_2 : G_2 \to \mathbf{C}$ continue în z_0 respectiv z_1 cu $g_1(z_0) = 0$ și $g_2(z_1) = 0$, astfel încît

$$\text{pentru orice } z \in G_1 \Rightarrow f_1(z) = f_1(z_0) + f_1'(z_0)(z - z_0) + g_1(z)(z - z_0),$$

$$\text{pentru orice } z \in G_2 \Rightarrow f_2(z) = f_2(z_1) + f_2'(z_1)(z - z_1) + g_2(z)(z - z_1).$$

De aici deducem pentru orice $z \in G_1$, $(f_2 \circ f_1)(z) = f_2[f_1(z)] = (f_2 \circ f_1)(z_0) + f_2'(z_1)\, f_1'(z_0)(z - z_0) + \{f_2'(z_1)\, g_1(z) + (g_2 \circ f_1)(z)[f_1'(z_0) + g_1(z)]\}(z - z_0)$, unde expresia dintre acolade este continuă în z_0 și egală cu zero în z_0. Deci $f_2 \circ f_1$ este derivabilă în z_0 și avem $(f_2 \circ f_1)'(z_0) = f_2'(z_1)\, f_1'(z_0) = (f_2' \circ f_1)(z_0)\, f_1'(z_0)$. □

5. *Dacă* $G_2 \subset G_1$ *sînt două submulțimi ale lui* $\mathbf{C}$ *și* f *este derivabilă în* $z_0 \in G_2$, *atunci* $f|G_2$, *restricția funcției* f la G_2, *este derivabilă în* z_0 *și avem* $(f|G_2)'(z_0) = f'(z_0)$.

Deoarece $f|G_2 = f \circ j$, unde j este injecția canonică a lui G_2 în G_1 și $j'(z_0) = 1$, obținem conform observației (2.42.4) relația $(f|G_2)'(z_0) = f'(z_0)\, j'(z_0) = f'(z_0)$. □

§ 6. FUNCȚII OLOMORFE

2.44. **Definiții.** O funcție complexă f se numește *olomorfă pe G* dacă f este derivabilă în fiecare punct z_0 din mulțimea deschisă G. Mulțimea tuturor funcțiilor olomorfe pe G se notează cu $\mathscr{H}(G)$.

O funcție complexă f se numește *olomorfă pe o mulțime oarecare* $A \subset \mathbf{C}$ dacă există o mulțime deschisă G care include A astfel încît f să fie olomorfă pe G.

O funcție olomorfă pe $\mathbf{C}$ se numește *funcție întreagă*.

În baza acestor definiții urmează că o funcție complexă este *olomorfă* în punctul $z_0 \in G$ dacă există un disc $U(z_0\,;r)$ astfel încît f să fie olomorfă pe $U(z_0\,;r)$, deci f să fie derivabilă în fiecare punct z din $U(z_0\,;r)$. Dacă în plus $f(z_0) = 0$, z_0 se numește un zero al lui f (vezi (4.16)).

2.45. **Definiție.** O funcție reală u definită pe G din $\mathbf{C}$ se numește *continuu diferențiabilă de ordinul întîi pe G* dacă ea admite derivate parțiale de ordinul întîi continue pe G. Clasa funcţiilor continue diferenţiabile de ordinul întîi pe G se notează cu $C^1(G)$.

O funcţie complexă $\mathrm{u}+\mathrm{iv}$ se numeşte continuu diferenţiabilă pe G dacă u şi v sînt de clasa C^1 pe G.

În general este dificil să se verifice condiţiile de diferenţiabilitate într-un punct $z_0 \in G$ date în teorema (2.31). Luînd în locul lor condiţii mai restrictive, care să asigure diferenţiabilitatea, putem enunţa următoarea:

2.46. **Propoziţie.** *Dacă* $u = \mathbf{Re}\, \mathrm{f}$ *şi* $v = \mathbf{Im}\, \mathrm{f}$ *sînt continuu diferenţiabile de ordinul întîi pe un disc* $U(z_0\,;r)$ *cu rază oricît de mică* $(u, v \in C^1(U(z_0\,;r)))$ *şi derivatele parţiale ale lor satisfac relaţiile Cauchy-Riemann în punctul* z_0, *atunci* f *este derivabilă în punctul* z_0. În adevăr, continuitatea derivatelor parţiale ale funcţiilor u şi v implică diferenţiabilitatea lor în z_0 şi din teorema (2.31) urmează că f este derivabilă în punctul z_0. □

Pentru olomorfie pe o mulţime deschisă G avem:

2.47. **Propoziţie.** *Dacă* $u = \mathbf{Re}\, \mathrm{f}$, $v = \mathbf{Im}\, \mathrm{f} \in C^1(G)$ *şi derivatele lor parţiale satisfac relaţiile Cauchy-Riemann pe* G, *atunci* f *este olomorfă pe* G. Evident propoziţia este tot o consecinţă a teoremei (2.31).

Exemple. 1) Dacă $\mathrm{u}(x, y) = x^2 - y^2$, $\mathrm{v}(x, y) = 2xy$ atunci $\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = 2y$, $\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = 2x$ sînt continue pe $\mathbf{C}$ şi satisfac relaţiile lui Cauchy-Riemann. deci $x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = (x + \mathrm{i}y)^2$ este olomorfă pe $\mathbf{C}$.

2) Relaţiile Cauchy-Riemann sînt condiţii necesare de derivabilitate pentru funcţia f dar nu sînt suficiente. În adevăr funcţia f definită prin

$$\mathrm{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dacă } z \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } z = 0 \end{cases}$$

este continuă şi în $z = 0$, cum se vede uşor trecînd în coordonate polare $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, iar derivatele parţiale ale lui u şi v sînt nule în $z = 0$, deci satisfac relaţiile Cauchy-Riemann. Dar, cum se verifică uşor, funcţia nu este derivabilă în $z = 0$ pentru că raportul $\dfrac{\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(0)}{z - 0} = \dfrac{\sin\theta}{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\theta}$ depinde de θ.

3) Condiţiile de diferenţiabilitate a funcţiilor reale u şi v sînt necesare pentru derivabilitatea funcţiei f dar nu sînt suficiente. În adevăr, dacă $\mathrm{f}(z) = \bar{z} = x - \mathrm{i}y$, $\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = 1 = -\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}$ — aşa că relaţiile lui Cauchy-Riemann nu sînt satisfăcute nicăieri şi deci f nu este olomorfă pe $\mathbf{C}$ deşi u şi v sînt $\mathbf{R}$— diferenţiabile.

2.48. **Propoziţie.** *Dacă* D *este un domeniu din* $\mathbf{C}$ *şi* $\mathrm{f} \in \mathscr{H}(D)$, *atunci derivata funcţiei* f *este nulă pe* D *dacă şi numai dacă* f *este constantă pe* D.

Necesitatea. $\mathrm{f}'(z) = 0$ pe D şi fie z_0 un punct oarecare din D, adică $\mathrm{f}'(z_0) = 0$; D fiind mulţime deschisă urmează că există $U(z_0\,;r) \subset D$. Pentru orice punct $z_1 \in U(z_0\,;r) \subset D$ avem $\mathrm{f}'(z_1) = 0$. Din relaţiile (2.38.1) urmează $\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(z_1) = 0$, $\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(z_1) = 0$ şi $\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}(z_1) = 0$, $\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}(z_1) = 0$. Prin urmare

$u(x_0, y_0) = u(x_1, y_0) = u(x_1, y_1)$ și $v(x_0, y_0) = v(x_1, y_0) = v(x_1, x_1)$ pentru orice x_1 și y_1 satisfăcînd inegalitățile $|x_1 - x_0| < r/\sqrt{2}$, $|y_1 - y_0| < r/\sqrt{2}$. Deci $f(z_1) = u(x_1, y_1) + iv(x_1, y_1) = f(z_0)$ pentru orice $z_1 \in U(z_0; r)$. Fie $A_1 = \{z_1 \in \mathbf{C};\ f(z_1) = f(z_0)\}$. Din demonstrația anterioară urmează că dacă $z_0 \in A_1$ atunci există $U(z_0; r) \subset A_1$, deci A_1 este deschisă în D. Fie z_n un șir din A_1 convergent la $z \in D$. Deoarece f este continuă pe D urmează că $f(z_0) = f(z_n) = f(z)$, adică $z \in A_1$, prin urmare A_1 este și închisă în D ca spațiu. Cum $A_1 \neq \Phi$, A_1 este deschisă și închisă în D și D este conexă, urmează că $A_1 = D$. Deci $f(z) = f(z_0)$ pentru orice $z \in D$. Suficiența este evidentă.□

2.49. **Propoziție.** *O funcție complexă* $f \in \mathscr{H}(D)$, *unde* D *este un domeniu din* $\mathbf{C}$, *este constantă dacă și numai dacă cel puțin una din funcțiile* **Re** f, **Im** f, |f|, *arg* f *este constantă pe* D.

Fiecare din aceste condiții este necesară pentru ca f să fie constantă, deoarece dacă f este constantă pe D, atunci **Re** f, **Im** f, |f|, arg f sînt constante.

Condițiile sînt suficiente. Dacă $u(x, y) = \mathbf{Re} f(z) = c$ pentru orice z din D, atunci $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$ și $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$ pentru orice $z \in D$. Din propoziția (2.48) rezultă că f este constantă pe D. Dacă $v(x, y) = c$ pe D, atunci $\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 0$ și $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 0$ și aplicind din nou propoziția (2.48), f este constantă pe D.

Dacă $|f(z)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y)$ este constant pe D, atunci derivînd în raport cu x și y avem $2u\frac{\partial u}{\partial x}(z) + 2v\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 0$, $2u\frac{\partial u}{\partial y}(z) + 2v\frac{\partial v}{\partial y}(z) = 0$.

Folosind convenabil condițiile Cauchy-Riemann, obținem un sistem liniar și omogen

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}(z) + v\dfrac{\partial v}{\partial x}(z) = 0, \\[2ex] v\dfrac{\partial u}{\partial x}(z) - u\dfrac{\partial v}{\partial x}(z) = 0. \end{cases}$$

Dacă $u^2 + v^2 = 0$, atunci $u = v = 0$ și $f = 0$ este constantă pe D. Dacă $u^2 + v^2 > 0$, atunci sistemul admite soluția banală $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial x}(z) = 0$ pentru orice z din D, adică $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 0$ în orice z din D. Conform rezultatului (2.48) urmează că f este constantă pe D.

Dacă $\arg f = \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} = k_0$, atunci $\frac{v}{u} = k$. Dacă $u = 0$ pe D, atunci $u = \mathbf{Re} f$ este constant în D și, din prima parte a acestei propoziții, f este constantă pe D. Dacă $u \neq 0$, atunci $v - ku = 0$ și funcția $(-k - i)$ f are partea reală egală cu zero pe D, deci $(-k-i)$ f este constantă și, prin urmare, f este constantă pe D. □

2.50. **Consecințe.** Orice funcție olomorfă pe un domeniu nu poate avea partea reală constantă și partea imaginară a funcției neconstantă pe domeniu și nici invers. Ca un caz particular al acestei consecințe avem că orice funcție olomorfă pe un domeniu nu poate fi pur reală sau pur imaginară decît cînd funcția degenerează într-o constantă. În adevăr, dacă $\mathrm{v} = 0$ pe domeniu D, urmează că u este de asemenea constantă în domeniu. La fel, dacă $\mathrm{u} = 0$, atunci v este constantă pe D.

§ 7. EXEMPLE DE FUNCȚII OLOMORFE PE **C** (FUNCȚII ÎNTREGI)

2.51. În acest paragraf vor fi introduse acele funcții elementare care sînt olomorfe în întreg planul complex, adică funcția polinomială, funcția exponențială, funcțiile trigonometrice (sin și cos) și funcțiile trigonometrice hiperbolice (sh și ch). Verificarea că aceste funcții sînt olomorfe pe $\mathbf{C}$ se va face cu ajutorul propoziției (2.47).

2.52. *Funcția polinomială* este o funcție $\mathrm{p} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definită prin $\mathrm{p}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$, unde $c_j \in \mathbf{C}$, $j \in \overline{0, n}$. Dacă $c_n \neq 0$, atunci polinomul p este de grad n. O constantă diferită de zero este polinom de grad 0. Constanta 0, considerată ca funcție polinomială, din motive formale, este privită ca polinom de grad $-\infty$. Aplicînd observația (2.42.2) produsului $z . z \ldots z$, rezultă că $(z^n)' = nz^{n-1}$. O funcție polinomială fiind o sumă de funcții derivabile pe $\mathbf{C}$, va aparține clasei $\mathscr{H}(\mathbf{C})$.

2.53. *Funcția* $z \mapsto \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y)$, *unde* $z = x + \mathrm{i}y$, *aparține clasei de funcții* $\mathscr{H}(\mathbf{C})$, și are proprietățile principale ale funcției reale $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Cum $\mathrm{e}^x \cos y$ și $\mathrm{e}^x \sin y$ sînt continuu diferențiabile de ordinul întîi pe $\mathbf{C}$ și verifică relațiile Cauchy-Riemann, conform propoziției (2.47), rezultă că această funcție aparține lui $\mathscr{H}(\mathbf{C})$. În cazul $y = 0$ funcția noastră se reduce la funcția exponențială reală e^x. În punctul $z = 0$ valoarea funcției considerate este 1. Aplicînd formulele (2.38.1) obținem $\mathrm{f}'(z) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{f}(z)$.

$$\mathrm{e}^{x_1 + x_2}(\cos(y_1 + y_2) + \mathrm{i} \sin(y_1 + y_2)) = \mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1 + \mathrm{i} \sin y_1)\, \mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2 + \mathrm{i} \sin y_2)$$

rezultă din teorema adunării (1.20) pentru funcția $\theta \mapsto \cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta$ și teorema adunării pentru funcția exponențială reală $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Evident această funcție, notată $z \mapsto \mathrm{e}^z$ sau $z \mapsto \exp z$, este o prelungire unică olomorfă (*cf.* 1.20) a funcției e^x la tot planul complex $\mathbf{C}$. Deci

2.54. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y)$, $(\mathrm{e}^z)^{(n)} = \mathrm{e}^z$, pentru $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{e}^0 = 1$, $\mathrm{e}^{z_1 + z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \mathrm{e}^{z_2}$.

Din (2.54) luînd $x = 0$ și înlocuind y cu x, obținem formula lui Euler

2.55. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ și

2.56. $\mathbf{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \cos y$, $\mathbf{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \sin y$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$, $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}$, $\arg \mathrm{e}^z \equiv y \pmod{2\pi}$, $\mathrm{e}^z \neq 0$ pentru că $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x > 0$.

2.57. $\mathrm{e}^{z + 2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$,

pentru că $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$. (2.57) exprimă că funcția exponențială este periodică de perioada $2\pi\mathrm{i}$. Această proprietate spune că planul complex $\mathbf{C}$ se împarte într-o infinitate numărabilă de benzi $B_k = \{z\, ;\ x \in \mathbf{R},\ 2k\pi \leqslant y < 2(k+1)\pi\}$ paralele cu Ox și pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}$ fiecare $z_k = x_0 + \mathrm{i}(y_0 + 2k\pi) \in B_k$ așa ca $\mathrm{e}^{z_k} = \mathrm{e}^{x_0 + \mathrm{i}y_0}$, unde $0 \leqslant y_0 < 2\pi$.

Din formula (2.55) și reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe din (1.29) obținem reprezentarea exponențială a unui număr complex z:

2.58. $$z = re^{i\theta},$$

unde $r = |z|$ și $\theta \in \mathbf{Arg}\, z$.

Din formula lui Euler, scrisă pentru x și $-x$, prin adunare și scădere, obținem reprezentarea prin funcțiile exponențiale e^{ix} și e^{-ix}, a funcțiilor trigonometrice cosinus și sinus, prin

2.59. $$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

2.60. **Definiții.** Funcțiile trigonometrice cosinus și sinus de variabila complexă z se definesc prin relațiile:

2.61. $$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

care se obțin din (2.59) înlocuind x cu z.

Se verifică ușor că aceste funcții sînt întregi și $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$. De asemenea ele sînt periodice cu singurele perioade $2k\pi$. Se obține și:

2.62. $\cos ix = \operatorname{ch} x$ și $\sin ix = i \operatorname{sh} x$,

unde ch și sh reprezintă cosinusul și sinusul hiperbolic și

2.63. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Din teorema de adunare avem: $e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1}e^{iz_2}$, $e^{-i(z_1+z_2)} = e^{-iz_1}e^{-iz_2}$, și aplicînd definiția funcției exponențiale și adunînd și scăzînd, obținem formulele

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1.$$

Scriind $\cos z = \cos(x + iy)$ și $\sin z = \sin(x + iy)$ și aplicînd aceste formule de adunare, avem:

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{ch} y,\ \sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \text{ și}$$
$$|\cos z|^2 = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} 2y + \cos 2x],\ |\sin z|^2 = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} 2y - \cos 2x].$$

Aceste ultime formule arată că $|\cos z|^2$ și $|\sin z|^2$ sînt aproximativ egale cu $\frac{1}{2}e^{2|y|}$ pentru y suficient de mare. Deci $\cos z$ și $\sin z$ pentru $y \to \infty$ nu sînt mărginite. Aceasta este o deosebire esențială între funcțiile trigonometrice reale cosinus și sinus, care sînt mărginite, și funcțiile trigonometrice complexe definite în (2.61).

2.64. **Definiții.** Funcțiile trigonometrice hiperbolice ch și sh se definesc prin relațiile $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$ și $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$, obținute înlocuind x cu z în definiția funcțiilor trigonometrice hiperbolice reale.

Ele aparțin clasei de funcții $\mathscr{H}(\mathbf{C})$, sînt periodice de perioadă $2\pi i$; această proprietate și (2.57), arată că sh, ch și exp definite pe $\mathbf{C}$ se deosebesc de cele reale prin faptul că sînt periodice de perioadă $2\pi i$.

Se demonstrează ușor teorema de adunare, $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$ etc.

2.65. *Observații.* Funcția exponențială nu are zerouri în $\mathbf{C}$ pentru că $e^z \neq 0$ pentru orice $z \in \mathbf{C}$ (formulele 2.56). Polinoamele au un număr finit de zerouri în $\mathbf{C}$. Funcțiile trigonometrice (sin, cos) și trigonometrice hiperbolice (sh, ch) au o infinitate numărabilă de zerouri. Mulțimile zerourilor sînt respectiv

$$\{k\pi\,;\ k \in \mathbf{Z}\},$$

$$\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\,;\ k \in \mathbf{Z}\right\} \ \text{și}\ \{k\pi i\,;\ k \in \mathbf{Z}\},\ \left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\,;\ k \in \mathbf{Z}\right\}$$

pentru funcțiile scrise în paranteze și definite în (2.61) și (2.64).

§ 8. FUNCȚII OMOGRAFICE

2.66. Funcția $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ cu $w(\infty) = a/c$ pentru $c \neq 0$, $w(\infty) = \infty$ pentru $c = 0$ și $w(-d/c) = \infty$ dacă $c \neq 0$, definită pe $\mathbf{C}_\infty$ cu valori în $\mathbf{C}_\infty$, se numește *funcție omografică.* Se vede că orice funcție omografică are coeficienții a, b, c, d definiți pînă la un factor constant complex diferit de zero. Funcția omografică este olomorfă în $\mathbf{C} \setminus \{-d/c\}$ sau în $\mathbf{C}$ dacă $c = 0$. Punctul $-d/c$, în primul caz, și ∞ în cel de-al doilea, se numesc poli simpli pentru funcția omografică. Deci o funcție omografică are un pol simplu : $-d/c$ dacă $c \neq 0$ sau ∞ dacă $c = 0$.

Funcțiile omografice $T : z \mapsto w$ cu w definit în (2.66) cu matricele de tip (2,2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se mai numesc transformări liniare, liniar fracționare, circulare, biliniare sau transformări Möbius (Moebius). Se vede că mulțimea acestor transformări este grup față de operația de compunere a funcțiilor și că fiecare transformare omografică este un omeomorfism de la $\mathbf{C}_\infty$ pe $\mathbf{C}_\infty$. Deci transformările omografice formează un grup de automorfisme a lui $\mathbf{C}_\infty$ sau a sferei lui Riemann S_2.

Cînd $c \neq 0$ transformarea omografică se scrie în forma

2.67. $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{(bc - ad)}{c^2(z + d/c)}$,

de unde rezultă că transformarea (2.66) este compusă din transformările omografice particulare $z_1 = z + \dfrac{d}{c}$, $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$, $z_3 = kz_2 \left(k = \dfrac{bc - ad}{c^2}\right)$, $w = z_3 + \dfrac{a}{c}$. Deci orice transformare omografică este compusă din translații $z' = z + \alpha$, omotetii de raport $k \neq 0$ $\left(\text{compunerea unei rotații și a unei dilatații } z' = |k| \dfrac{k}{|k|} z\right)$ și simetrii-inversiuni de forma $z' = 1/z$ (compunerea unei simetrii față de Ox și a unei inversiuni de pol 0 și de putere 1).

Dacă $c = 0$, atunci $w = \dfrac{a}{d} z + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{d}\left(z + \dfrac{b}{a}\right)$ și transformarea omografică este compusă dintr-o translație și o omotetie.

2.68. **Propoziție.** *Transformările omografice duc cercuri în sens larg pe cercuri în sens larg (prin care în sens larg se înțelege un cerc sau o dreaptă, considerată ca un cerc ce trece prin punctul de la infinit).* Cum ecuația unui cerc este $Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0$ cu A, $C\in\mathbf{R}$ și $B\in\mathbf{C}$ și inversa transformării (2.66) este $z=(dw-b)/(-cw+a)$ se obține o ecuație de aceeași formă în w și $\bar{w}$ cu coeficienți A_1, B_1, C_1 cu A_1, $C_1\in\mathbf{R}$ și $B_1\in\mathbf{C}$. □

2.69. *Dacă* T *este o transformare omografică, atunci* $(\mathrm{T}z_1, \mathrm{T}z_2, \mathrm{T}z_3, \mathrm{T}z_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$, unde $(z_1, z_2, z_3, z_4)\doteq\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_4}:\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_4}$ este biraportul celor patru puncte $z_1, z_2, z_3, z_4\in\mathbf{C}$ și cel mult unul egal cu ∞, adică *biraportul este invariant la transformările omografice.* Verificarea se face imediat observînd că $Tz_1-Tz_2=(ad-bc)(z_1-z_2)/(cz_1+d)(cz_2+d)$. □

2.70. $(z_1, z_2, z_3, z_4)\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z_1, z_2, z_3, z_4$ *sînt pe un cerc în sens larg.*

În adevăr relația $\arg(z_1-z_2)/(z_1-z_4)-\arg(z_3-z_2)/(z_3-z_4)\equiv 0 \pmod{\pi}$ este adevărată dacă $\arg(z_1-z_2)/(z_1-z_4)\equiv 0 \pmod{\pi}$, adică z_1, z_2, z_4 sînt coliniare și $\arg(z_3-z_2)/(z_3-z_4)\equiv 0 \pmod{\pi}$, adică z_2, z_3, z_4 sînt coliniare, adică z_1, z_2, z_3, z_4 sînt coliniare *sau cînd* $\arg(z_1-z_2)/(z_1-z_4)\not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ceea ce arată că z_1, z_2, z_4 nu sînt coliniare și deci determină un cerc și congruența de la început se scrie $z_2\hat{z}_1z_4-z_2\hat{z}_3z_4\equiv 0 \pmod{\pi}$, sau $z_2\hat{z}_1z_4\equiv z_2\hat{z}_3z_4 \pmod{\pi}$. În acest caz $z_2\hat{z}_1z_4=z_2\hat{z}_3z_4$ sau $z_2\hat{z}_1z_1=z_2\hat{z}_3z_4+\pi$, adică avem una din situațiile din figurile de mai jos;

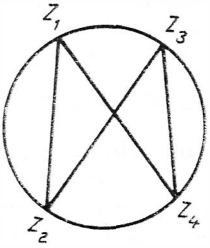


Fig. 2.70 (a)

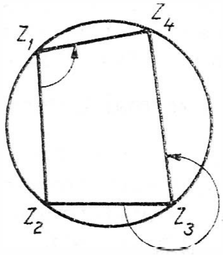


Fig. 2.70 (b)

2.71. *Transformarea omografică* $z^*=z_0+R^2/(z-z_0)$ *definește o inversiune a lui* z *față de cercul de rază* R *centrat în* z_0 *urmată de o simetrie față de dreapta* $y=\mathbf{Im}\,z_0$. Se vede că $|z^*-z_0||z-z_0|=R^2$ și $(z^*-z_0)\cdot(\bar{z}-\bar{z}_0)\in\mathbf{R}$. O construcție geometrică simplă dă inversa lui z cînd cunoaștem pe z. Observăm imediat că dacă $z=z_0$, atunci $z^*=\infty$. De asemenea, produsul a două inversiuni este o transformare omografică.

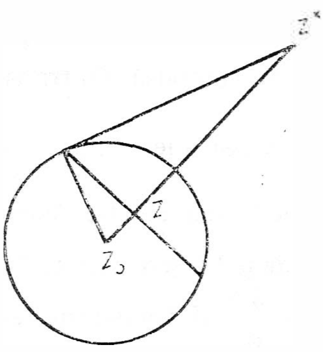


Fig. 2.71

2.72. **Propoziție.** *Mulțimea transformărilor omografice* $z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$, $a, b, c, d\in\mathbf{R}$ *este un subgrup al grupului transformărilor omografice definite în (2.66) și aplică semiplanul superior pe el însuși.* Evident se verifică că mulțimea acestor transformări omografice este grup care transformă axa reală pe ea însăși și reciproc dacă axa reală este transformată în ea însăși, coeficienții a, b, c, d sînt determinați, pînă la un factor, de un sistem de ecuații liniare cu coeficienți reali, care se obține scriind că punctele corespunzătoare prin transformarea omografică sînt reale pentru trei puncte distincte z_1, z_2, z_3 de pe axa reală.

Se vede ușor că transformările considerate în această propoziție transformă semiplanul superior $y > 0$ pe el însuși. Este suficient pentru aceasta să verificăm că punctul $z = \mathrm{i}$ se transformă în $\dfrac{a\mathrm{i}+b}{c\mathrm{i}+d} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{ad-bc}{c^2+d^2}$, unde $\mathbf{Im}\,\dfrac{a\mathrm{i}+b}{c\mathrm{i}+d} = \dfrac{ad-bc}{c^2+d^2} > 0$. □

2.73. **Propoziție.** *Mulțimea transformărilor omografice care transformă discul unitate pe el însuși este un subgrup al grupului transformărilor omografice și ele au forma:*

$$2.74\quad \mathrm{w} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},\ \theta\in\mathbf{R},\ |z_0|<1.$$

Transformările omografice din propoziție trebuie să transforme cercul $z\bar{z} = 1$ în cercul $\mathrm{w}\bar{\mathrm{w}} = 1$ și discul $z\bar{z} < 1$ în discul $\mathrm{w}\bar{\mathrm{w}} < 1$. Prima din aceste condiții exprimă că avem $(az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) = (cz+d)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d})$ oricare ar fi z de modul 1, ceea ce implică:

2.75. $a\bar{a} - c\bar{c} = b\bar{b} - d\bar{d}$ și $a\bar{b} = c\bar{d}$.

Avem atunci $1 - \mathrm{w}\bar{\mathrm{w}} = \dfrac{(d\bar{d}-b\bar{b})(1-z\bar{z})}{|cz+d|^2}$ și $1 - z\bar{z} > 0$ implică $1 - \mathrm{w}\bar{\mathrm{w}} > 0$, dacă și numai dacă

2.76. $d\bar{d} - b\bar{b} > 0$.

Inegalitatea (2.76) și prima relație din (2.75) implică $d \neq 0$, $a \neq 0$. Din egalitatea a doua din (2.75) avem $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\bar{b}}{\bar{d}} = \bar{\lambda}$. Din această egalitate și (2.76) urmează $|\lambda| < 1$. Tot din această inegalitate și prima din (2.75) urmează $|a| = |d|$. Deci

$$\mathrm{w} = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}\,\frac{z+\lambda\dfrac{d}{a}}{1+\bar{\lambda}\dfrac{a}{d}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

deoarece $|a| = |d|$ antrenează $a/d = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ și $z_0 = -\lambda\,d/a$ implică $|z_0| = |\lambda|\,|d/a| = |\lambda| < 1$ și $\bar{z}_0 = -\overline{\lambda\,d/a} = -\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -\lambda\,a/d$. □

2.77. *Clasificarea transformărilor omografice după punctele lor fixe* $\alpha \neq \beta$, adică punctele care satisfac relația $(az+b)/(cz+d) = z$ sau $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Punînd în evidență punctele fixe α și β $(\alpha \neq \beta)$ transformarea omografică se scrie

$$2.78.\quad \frac{\mathrm{w}-\alpha}{\mathrm{w}-\beta} = k\,\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

unde k se determină scriind că punctului $z = -d/c$ îi corespunde $\mathrm{w} = \infty$, deci $k = (c\beta + d)/(c\alpha + d)$. După valorile lui k, transformarea omografică cu puncte fixe distincte se numește: *hiperbolică* cînd $k \in \mathbf{R}$, *eliptică* cînd $k \in \mathbf{C}$ și $|k| = 1$, *loxodromică* cînd $k \in \mathbf{C}$ și $|k| \neq 1$.

2.79. Dacă $\alpha=\beta$ (puncte fixe confundate) transformarea omografică se numește *parabolică*. În acest caz $\frac{w-\alpha}{w-\beta}=k\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ se scrie $1+\frac{\beta-\alpha}{w-\beta}=$ $=k+k\frac{\beta-\alpha}{z-\beta}$ sau $\frac{1}{w-\beta}=\frac{k}{z-\beta}+\frac{k-1}{\beta-\alpha}$ și avem $\lim\limits_{\beta\to\alpha} k=\lim\limits_{\beta\to\alpha}\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}=1$ și $\lim\limits_{\beta\to\alpha}\frac{k-1}{\beta-\alpha}=\lim\limits_{\beta\to\alpha}\frac{\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}-1}{\beta-\alpha}=\frac{c}{c\alpha+d}=\frac{2c}{a+d}$. Deci transformările omografice parabolice sînt de forma $\frac{1}{w-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+c'$, unde $c'=2c/(a+d)$.

2.80. În cazurile transformărilor omografice hiperbolice și loxodromice, dacă $|k|<1$ avem

$\frac{T^n z-\alpha}{T^n z-\beta}=k^n\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ atunci $T^n z$, iterata n—a a lui z, pentru $z\neq\beta$, tinde uniform la α cînd $n\to\infty$; α se numește *punctul fix atractiv* și β *punctul fix repulsiv* al transformării omografice. Dacă $|k|>1$ și $z\neq\alpha$, valorile punctelor α și β se schimbă între ele. În cazul transformărilor omografice eliptice *punctele fixe α și β se numesc indiferente.*

§ 9. FUNCȚII RAȚIONALE

2.81. O funcție rațională $R:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ este definită ca un cît de două polinoame p și q care nu au factori comuni (deci fără zerouri comune). Evident R este o funcție olomorfă pe $\mathbf{C}\setminus\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ unde $b_k, k\in\overline{1, m}$, sînt zerourile din $\mathbf{C}$ ale polinomului q de la numitor, numite *poli* pentru funcția rațională. Derivata este dată de (2.42) pentru orice $z\in\mathbf{C}$ cu $q(z)\neq 0$. Dacă luăm $R(b_k)=\infty$, atunci $R:\mathbf{C}\to\mathbf{C}_\infty$. O unitate mai mare se obține dacă permitem variabilei z să parcurgă $\mathbf{C}_\infty$, adică prelungind prin continuitate funcția R in punctul ∞ luînd $R(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}R(z)$. Această prelungire nu determină ordinul de multiplicitate al zeroului sau ordinul polului ∞. Luînd $R(1/z)=R_1(z)$ atunci $R(\infty)=R_1(0)$ și dacă $R_1(0)=0$ sau ∞, atunci ordinul de multiplicitate al zeroului sau ordinul polului funcției raționale în ∞ este ordinul de multiplicitate al zeroului sau ordinul polului funcției raționale R_1 în 0.

$$R(z)=\frac{\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_n z^n}{\beta_0+\beta_1 z+\ldots+\beta_n z^m}\Rightarrow R_1(z)=z^{m-n}\frac{\alpha_0 z^n+\alpha_1 z^{n-1}+\ldots+\alpha_n}{\beta_0 z^m+\beta_1 z^{m-1}+\ldots+\beta_m}\text{ cu}$$

$$\alpha_0\neq 0,\ \beta_0\neq 0.$$

2.82. **Propoziție.** *Pentru orice funcție rațională numărul zerourilor este egal cu numărul polilor*, fiecare zero sau pol fiind considerat ca zero sau pol simplu de atîtea ori cît indică ordinul de multiplicitate al zeroului sau respectiv ordinul polului. Numărul comun al zerourilor și polilor din $\mathbf{C}_\infty$ se numește ordinul funcției raționale. *Ecuația $R(z)=\alpha$* (α constantă complexă) *are numărul rădăcinilor egal cu ordinul funcției raționale R.*

Numărul zerourilor și polilor din $\mathbf{C}_\infty$ ai funcției raționale sînt dați în următorul tablou:

Cazuri	Numărul zerourilor în $\mathbf{C}$	Ordinul zeroului ∞	Numărul zerourilor în $\mathbf{C}_\infty$	Numărul polilor în $\mathbf{C}$	Ordinul polului ∞	Numărul polilor în $\mathbf{C}_\infty$
$m > n$	n	$m-n$	m	m	—	m
$m = n$	n	—	n	m	—	m
$m < n$	n	—	n	m	$n-m$	n

$R-\alpha$ are același număr de poli ca funcția R. □

2.83. *Observații.* Funcțiile raționale au un număr finit de poli, ele constituie un caz particular al *funcțiilor meromorfe* pe $\mathbf{C}$, care au numai *singularități polare* (în care valoarea funcției este ∞). Exemple de funcții meromorfe pe $\mathbf{C}$ care au o infinitate de poli simpli sînt date de funcțiile trigonometrice (cotg, tg și funcțiile trigonometrice hiperbolice (ctgh, tgh) care au ca poli, zerourile indicate la funcțiile date în (2.65). Evident toate funcțiile indicate aici sînt derivabile în toate celelalte puncte diferite de poli. (Vezi și (4.49), (4.54).)

Se știe că orice funcție rațională se poate reprezenta ca o sumă a unui polinom și o sumă finită de funcții raționale simple, fiecare cu un singur pol.

2.84. O funcție rațională de ordinul doi cu poli simpli, printr-o transformare omografică care duce polii în 0 și ∞, ia forma $z-w'=Az'+B+C/z'$ sau $w'-B=\sqrt{AC}(z'\sqrt{A}/\sqrt{C}+1/z'\sqrt{A/C})$. Notînd $\frac{w'-B}{2\sqrt{AC}}$ cu w și $z'\sqrt{A/C}$ cu z, adică aplicînd pentru w′ și z′ transformările omografice definite de notații, avem forma normală a funcției w în acest caz, definită de relația $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, care reprezintă *transformarea lui Jukowski.*

§ 10. APLICAȚII MULTIVOCE

2.85. **Definiție.** Mulțimea tuturor w cu $e^w = z$ pentru orice $z \in \mathbf{C}^*$ definește o aplicație multivocă (multifuncție) $\mathrm{Log}: \mathbf{C}^* \to \mathscr{P}(\mathbf{C})$ numită aplicația *logaritmică.* Dacă $w = u + iv$ și $z = re^{i\theta}$, $r \neq 0$, atunci $e^{u+iv} = re^{i\theta}$, de unde rezultă că $u = \ln r$ și $v = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, adică $\mathrm{Log}\, z = \{\ln r + i(\theta + 2k\pi);\, k \in \mathbf{Z}\}$. Deci, pentru orice $z \in \mathbf{C}^*$, putem scrie $\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathbf{Arg}\, z$. Fie $D = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C};\, \mathbf{Re}\, z \leqslant 0,\, \mathbf{Im}\, z = 0\}$. Pentru $z \in D$ și $k \in \mathbf{Z}$, vom nota $\log_k z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, unde $\arg z \in]-\pi, \pi]$, iar funcția $\log_k : D \to \mathbf{C}$ se va numi *ramură (sau determinare) uniformă* a aplicației multivoce Log. Funcția $\log_0$ se notează log și se numește *ramura principală* a aplicației Log.

Fie a și α două numere complexe, cu $a \neq 0$. Punînd $a = re^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi]$ și $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, definim a^α prin $a^\alpha = e^{\alpha \,\mathrm{Log}\, a} = \{z \in \mathbf{C};\, z = e^{\alpha_1 \ln r - \alpha_2(\theta + 2k\pi)}$ $e^{i[\alpha_2 \ln r + \alpha_1(\theta + 2k\pi)]}$, $k \in \mathbf{Z}\}$. Aplicația $\mathrm{F}: \mathbf{C}^* \to \mathscr{P}(\mathbf{C})$, definită prin $\mathrm{F}(z) = z^\alpha$, $z \in \mathbf{C}^*$, este o aplicație multivocă, ea exprimîndu-se prin aplicația multivocă Log. Pentru fiecare $k \in \mathbf{Z}$ se poate defini în domeniul D, considerat mai sus, o ramură uniformă $f_k = e^{\alpha \log_k}$. Dacă $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$, se poate arăta ușor că aplicația multivocă F are în D n determinări distincte.

Mulțimea numerelor complexe w cu $\cos w = z$ definește o aplicație multivocă $\mathbf{Arc} \cos : \mathbf{C} \to \mathscr{P}(\mathbf{C})$. Se verifică ușor că $\mathbf{Arc} \cos z = \pm \mathrm{i} \operatorname{Log}(z + \sqrt{(z^2 - 1)})$ și că fiecare determinare este uniformă pe domeniul $\mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} ;$ $|\mathbf{Re}\, z| \geqslant 1,$ $\mathbf{Im}\, z = 0\}$. La fel avem $\mathbf{Arc}\operatorname{tg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Log} \frac{-z+i}{z+\mathrm{i}}$. Uniformizarea determinărilor se face pe domeniul $\mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} ; |\mathbf{Im}\, z| \geqslant 1, \mathbf{Re}\, z = 0\}$.

2.86. Pentru a verifica mai simplu olomorfia determinărilor principale ale acestor funcții, avem nevoie de condițiile Cauchy-Riemann în coordonate polare. Dacă $w = f(z) = f(re^{i\theta}) = s(r, \theta) + it(r, \theta)$, atunci

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta(s + it)}{\Delta(re^{i\theta})} = \begin{cases} \dfrac{\Delta(s + it)}{e^{i\theta}\Delta r} & \text{dacă } \theta \text{ este constant,} \\[2ex] \dfrac{\Delta(s + it)}{r\Delta(e^{i\theta})} & \text{dacă } r \text{ este constant.} \end{cases}$$

Trecînd la limită ($\Delta r \to 0$ sau $\Delta\theta \to 0$) obținem $f'(z) = e^{-i\theta}(s'_r + it'_r) = \frac{e^{-i\theta}}{ir}(s'_\theta + it'_\theta)$, ceea ce conduce la relațiile Cauchy-Riemann în coordonate polare: $s'_r = \frac{1}{r} t'_\theta$, $t'_r = -\frac{1}{r} s'_\theta$. Pentru $\log z = \log r + i\theta$, $\theta \in]-\pi, \pi]$ avem $s'_r = 1/r$, $t'_\theta = 1$, $t'_r = 0$, $s'_\theta = 0$ și satisface relațiile Cauchy-Riemann. Din expresia lui $f'(z)$ verificăm ușor că $(\ln z)' = 1/z$. La fel se verifică olomorfia determinărilor pentru celelalte aplicații multivoce.

2.87. **Definiția funcțiilor elementare.** Constantele, funcția identitate $I(I(z) = z)$, funcția exponențială și funcția logaritmică se numesc *funcții elementare fundamentale*. Orice funcție care se obține prin aplicația de un număr finit de ori a operațiilor algebrice (adunare, înmulțire, împărțire cu funcții neidentic nule și extragerea rădăcinii) și a operației de compunere a funcțiilor elementare fundamentale se numește *funcție elementară*. Se vede imediat că toate funcțiile studiate din punct de vedere al olomorfiei sînt funcții elementare.

§ 11. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A DERIVATEI

2.88. Fie un drum $\gamma \in \mathscr{D}_G(z_0, z)$, unde z_0 și z aparțin unei mulțimi deschise $G \subset \mathbf{C}$. Dacă f este continuă în G, atunci $w = f \circ \gamma$ definește un drum γ_1 în planul (w) care este imaginea drumului γ în planul (w) și aparține mulțimii $\mathscr{D}(f(z_0), f(z))$. Drumul γ se numește *neted* dacă $\gamma \in C^1([0, 1])$ și $\gamma'(t) \neq 0$, pentru orice $t \in [0, 1]$. În acest caz există un vector tangent la drumul γ, în orice punct $\gamma(t)$, definit de $\gamma'(t)$. Dacă φ este unghiul pe care acest vector îl face cu sensul pozitiv al axei reale, atunci avem $\varphi \equiv \arg \gamma'(t)$

(mod 2π). Prin unghiul dintre două drumuri netede ce pleacă din același punct se înțelege unghiul dintre tangentele la cele două drumuri în acest punct.

Definiție. Aplicația $f: G \to \mathbb{C}$ de clasa C^1 se numește *transformare conformă de prima speță* în $z_0 \in G$ dacă unghiul dintre două drumuri netede oarecare γ, $\tilde{\gamma}$ ce pleacă din z_0 se păstrează pentru drumurile corespunzătoare γ_1, $\tilde{\gamma}_1$, ce pleacă din $f(z_0)$. Transformarea se numește *direct sau invers conformă* dacă se păstrează și sensul unghiurilor sau nu. Aplicația f se numește *transformare conformă de speța doua* dacă orice element de arc ($|d\gamma|$) cu punctul inițial în z_0 este contractat sau dilatat în același raport, adică $|(f \circ \gamma)'(0)| = k|\gamma'(0)|$, pentru orice drum neted $\gamma: [0, 1] \to G$, cu $\gamma(0) = z_0$. Numărul k se numește *coeficient de deformare liniară* în punctul z_0.

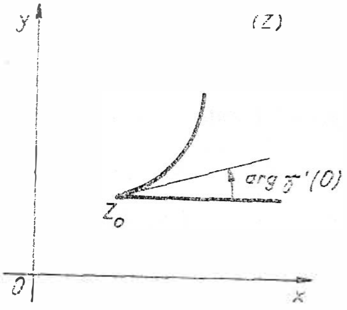


Fig. 2.89 a

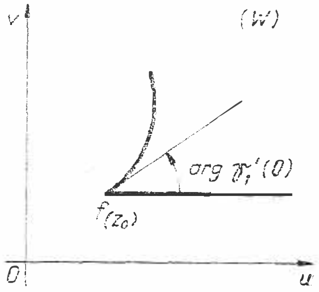


Fig. 2.89 b

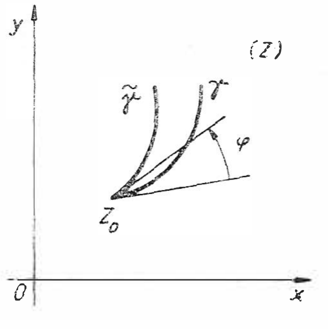


Fig. 2.89 c

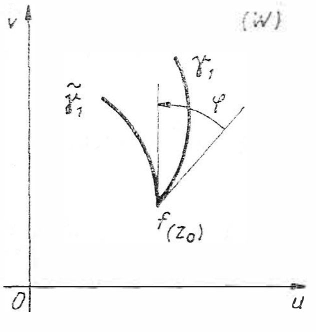


Fig. 2.89 d

2.89. **Teoremă.** *Dacă* $f \in \mathscr{H}(G)$, $z_0 \in G$ *și* $f'(z_0) \neq 0$, *atunci 1) transformarea* f *este direct conformă în* z_0 *și 2)* f *este conformă de speța a doua.*

Demonstrație. 1) Fie γ un drum neted arbitrar ce pleacă din z_0 și $\gamma_1 = f \circ \gamma$. Din (2.43), în ipotezele teoremei, avem $(f \circ \gamma)'(0) = (f' \circ \gamma)(0)\gamma'(0)$, adică $\gamma_1'(0) = f'(z_0)\gamma'(0)$. Deci $\gamma_1 = f \circ \gamma$ are tangenta în $w_0 = f(z_0)$ și direcția ei este determinată de $\arg \gamma_1(0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(0)$. Această relație afirmă că unghiul dintre tangentele la γ în z_0 și γ_1 în $w_0 = f(z_0)$ este egal cu $\arg f'(z_0)$. Deoarece $f'(z_0)$ nu depinde de drumul γ, rezultă că unghiul dintre două drumuri netede ce pleacă din z_0 se păstrează ca mărime și sens prin transformarea f, deci această transformare este direct conformă în z_0. 2) Deoarece oricare ar fi drumul neted γ ce pleacă din z_0 avem

$|(f\circ\gamma)'(0)| = |f'(z_0)|\,|\gamma'(0)|$, deducem că f este conformă de speţa a doua cu $k = |f'(z_0)|$. □

2.90. *Observaţii.* 1) Demonstraţia de mai sus pune în evidenţă faptul că dacă f este derivabilă în punctul $z_0 \in G$ şi $f'(z_0) \neq 0$, atunci $\arg f'(z_0)$ reprezintă *unghiul de rotaţie* al tangentei la un drum neted ce pleacă din z_0 prin transformarea f, iar $|f'(z_0)|$ reprezintă *coeficientul de deformare liniară* în acest punct.

2) Condiţia $f'(z_0) \neq 0$ în teorema (2.89) este esenţială. În adevăr se poate arăta uşor (considerînd, de exemplu, două raze ce pornesc din origine) că transformarea $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definită prin $f(z) = z^2$, dublează unghiurile în punctul $z_0 = 0$, unde derivata lui f se anulează.

3) Este clar că cele două conformităţi implică existenţa derivatei f' în $z_0 \in G$. Este mai puţin evident că numai una din cele două conformităţi implică existenţa derivatei f' în z_0, chiar impunînd condiţii noi de regularitate. Următorul rezultat, datorat lui Kasner (1928), permite să se dea un răspuns la această problemă.

2.91. **Propoziţie.** *Dacă funcţia complexă* f *este de clasă* C^1 *pe o mulţime deschisă* $G \subset \mathbf{C}$, $z_0 \in G$ *şi notăm* $f'_\gamma(z_0) = (f\circ\gamma)'(0)/\gamma'(0)$, *unde* γ *este un drum neted în* G *cu punctul iniţial* z_0, *atunci* $f'_\gamma(z_0)$ *descrie un cerc cînd* γ *variază. Acest cerc, numit cercul lui Kasner, are centrul în* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ *şi raza* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\right|$.

Punînd $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, avem

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + i\frac{d\beta}{dt}, \quad \overline{\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)} = \frac{d\alpha}{dt} - i\frac{d\beta}{dt}.$$

Eliminînd $\dfrac{d\alpha}{dt}$ şi $\dfrac{d\beta}{dt}$, obţinem

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{d\gamma}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)}, \text{ sau}$$

$$(f\circ\gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial z}\gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\overline{\gamma'(t)}.$$

Punînd $t = 0$ şi notînd $\psi = \arg \gamma'(0)$ deducem

2.92. $f'_\gamma(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\, e^{-2i\psi}$, sau

$$\left|f'_\gamma(z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\right|,$$

ceea ce arată că $f'_\gamma(z_0)$ descrie cercul lui Kasner. □

2.93. **Propoziție.** *Fie* f *o funcție complexă de clasă* C^1 *pe mulțimea deschisă* $G\subset \mathbb{C}$. *1) Dacă* f *este direct conformă în* $z_0\in G$ *atunci ea este derivabilă în* z_0. *2) Dacă* f *este conformă de speța a doua în punctul* $z_0\in G$, *atunci* f *sau* $\bar{f}$ *este derivabilă în* z_0.

1) Pentru ca $\arg f'_\gamma(z_0) = \arg\gamma_1'(0) - \arg\gamma'(0)$, $\gamma_1 = f\circ\gamma$, să fie independent de γ, trebuie ca $f'_\gamma(z_0)$ să fie constant. Din (2.92) deducem $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$, ceea ce implică derivabilitatea lui f în z_0. 2) $|f'_\gamma(z_0)| = |(f\circ\gamma)'(0)|/|\gamma'(0)|$ este constant oricare ar fi drumul neted γ din G, cu punctul inițial z_0, dacă sau raza cercului lui Kasner este zero și în acest caz f este derivabilă în z_0, sau centrul cercului lui Kasner este zero, adică $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$, ceea ce spune că $\bar{f}$ este derivabilă în z_0. □

2.94. **Definiție.** Dacă $\bar{f}\in\mathscr{H}(G)$ și $(\bar{f})'(z)\neq 0$ în G atunci spunem că f este antiolomorfă, anticonformă sau indirect conformă.

2.95. *Transformarea* $z\mapsto w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. *Profilul aripei de avion.* Pentru a studia această transformare vom folosi curbe de nivel. Punînd $z = re^{i\theta}$, avem $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ și avem $w = u + iv = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta + \frac{i}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$, deci $u = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta$, $v = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$.

1) Dacă z descrie curba de nivel $|z| = r$, punctul w descrie elipsa $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2} = 1$, $a = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$ obținută prin eliminarea parametrului θ din ecuațiile precedente. Cum $c = \sqrt{a^2-b^2} = 1$, urmează că focarele sînt situate în punctele -1 și 1, oricare ar fi r. Deci cercurile centrate în 0 sînt transformate într-o familie de elipse omofocale. Pentru $r = 1$ elipsa se reduce la segmentul $[-1, 1]$ parcurs de două ori în sensuri contrare.

2) Luînd curba de nivel $\theta = \text{const}$, eliminarea lui r, conduce la $\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 1$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 1$. Deci dreptele prin originea planului (z) se transformă într-o familie de hiperbole omofocale, cu focarele -1, și 1.

Funcția $z+\frac{1}{z}$ fiind olomorfă în tot planul exceptînd polii (0 și ∞) transformarea păstrează unghiul a două curbe. Deoarece dreptele $\theta = \text{const}$ și cercurile $|z| = r$ sînt ortogonale, urmează că hiperbolele celei de-a doua familii sînt ortogonale elipselor primei familii.

3) Cum $\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ avem $z_1 = \frac{z-1}{z+1}$ $z_2 = z_1^2$, $w = \frac{z_2+1}{-z_2+1}$. În planul (z) fie un cerc γ_1 care trece prin punctele -1 și 1 și face unghiul ψ cu axa Ox iar γ_2 un cerc tangent la γ_1 în punctul $+1$, avînd raza mai mare decît a cercului γ_1. În planul z_1 omografia $z_1 = (z-1)/(z+1)$ transformă cercul γ_1 în dreapta γ_1' prin 0 iar cercul γ_2 în γ_2' tangent în 0 la γ_1'. Transformarea $z_2 = z_1^2$ dublează toate unghiurile prin origină și transformă γ_1'

în γ_1'' parcursă de două ori în sensuri contrare, cercul γ_2' este transformat în γ_2'' cu punct de întoarcere în 0. $w = (z_2 + 1)/(-z_2 + 1)$, fiind o omografie, semidreaptă γ_1'' se transformă în cercul γ_1''' ce trece prin punctele -1 și

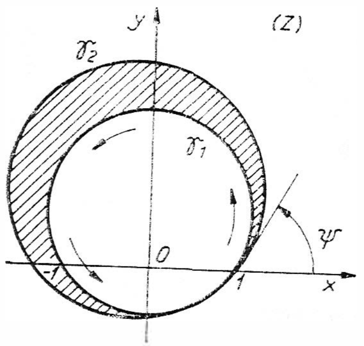


Fig. 2.95 a

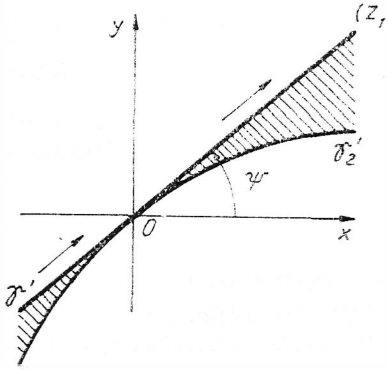


Fig. 2.95 b

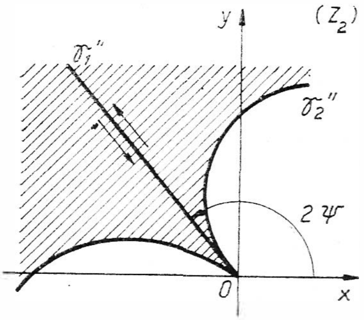


Fig. 2.95 c

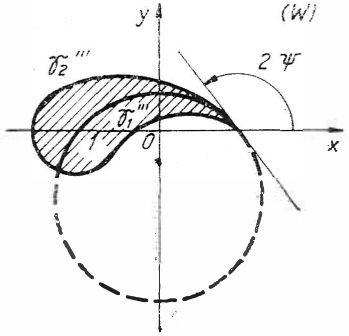


Fig. 2.95 d

1 și face unghiul 2ψ cu axa reală a planului w. γ_2'' este transformată în γ_2''' cu punct de întoarcere în $+1$. γ_1''' se numește *scheletul profilului* iar γ_2''' este *profilul lui Jukowski* aplicat la construcția aripilor de avion.

2.96. *Geometria lui Poincaré este o realizare a unui model euclidian a geometriei lui Lobacevski.* Grupul transformărilor omografice $w = (az + b)/(cz + d)$ cu $a, b, c, d, \in \mathbf{R}$ și $ad - bc = 1$ transformă semiplanul superior pe el însuși. Aceste transformări duc semicercurile centrate în puncte de pe axa reală în semicercuri de același tip și păstrează unghiurile deoarece $w = (az + b)/(cz + d)$ este olomorfă. Cum $v = y\,\dfrac{ad - bc}{|cz + d|^2}$ și $\left|\dfrac{dw}{dz}\right| = \dfrac{ad - bc}{|cz + d|^2}$, adică $\dfrac{ds_1}{v} = \dfrac{ds}{y}$ unde γ și γ_1 sînt drumuri din (z) și (w) corespunzătoare prin transformarea omografică considerată, avînd elementele de arc ds și $ds_1 \cdot ds/y$ este invariantul liniar al lui Poincaré. Dacă γ_3 este un drum din semiplanul superior, notăm cu $\displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{ds}{y}$ lungimea drumului γ_3. Grupul transformărilor omografice care transformă semiplanul superior pe el însuşi păstrează astfel lungimile şi unghiurile. Ca drepte neeuclidiene se consideră semicercurile centrate pe Ox din semiplanul superior. Se vede că dintr-un punct M exterior dreptei neeuclidiene (d) se pot duce o infinitate de paralele (cercuri care nu întîlnesc (d)).

După cum se constată din figură acest model are o dreaptă la infinit, se realizează pe un semiplan al planului complex şi nu are nimic comun cu planul complex extins care conţine întreg planul complex şi un singur punct la infinit. Grupul transformărilor omografice considerate reprezintă grupul mişcărilor (deplasărilor) în geometria lui Lobacevski.

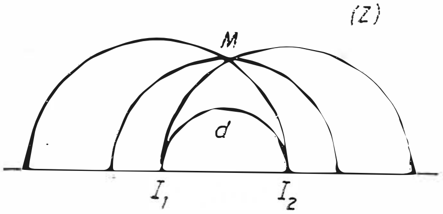


Fig. 2.96 a

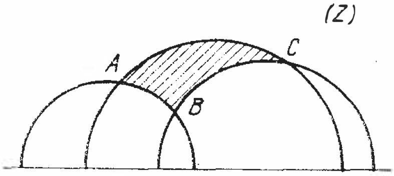


Fig. 2.96 b

După o analiză mai detaliată a acestui model, care nu constituie o preocupare a acestui manual, introducîndu-se un invariant superficial la deplasări, tot al lui Poincaré, se obţin două rezultate clasice :

1) aria unui triunghi este egală cu excesul lui π asupra sumei unghiurilor,

2) suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decît π.

Evident pentru aceasta trebuie să se introducă conceptele destul de dificile de unghi, arie, cerc, rotaţie.

CAPITOLUL III

INTEGRAREA FUNCȚIILOR COMPLEXE

După studiul derivatei, trecem la introducerea integralei unei funcții complexe de-a lungul unui drum. Proprietățile simple ale integralei complexe seamănă cu cele ale integralei reale. Vom obține de exemplu o teoremă de tipul formulei lui Newton-Leibniz. În continuare apar însă deosebiri substanțiale. Teorema lui Cauchy și formulele lui Cauchy n-au echivalent în domeniul real și atrag după sine un lanț întreg de rezultate specifice funcțiilor complexe care arată o legătură mult mai profundă decît în cazul real între teoria derivatei și cea a integralei. În primul rînd condiția de derivabilitate a unei funcții pe un domeniu D simplu conex, se dovedește a fi echivalentă cu cea a existenței unei primitive (în cazul axei reale, a doua condiție e mult mai slabă). În al doilea rînd vom demonstra, folosind teoremele privind integralele complexe, teoreme pur diferențiale, cum ar fi cea care asigură că orice funcție olomorfă, deci derivabilă pe o mulțime deschisă G e nelimitat derivabilă sau proprietatea că orice funcție derivabilă și mărginită pe $\mathbb{C}$ este constantă.

Tot în acest capitol vom arăta că părțile reală și imaginară ale unei funcții olomorfe sînt funcții armonice.

În ultimul paragraf vom reformula noțiunea de integrală complexă încadrînd-o în teoria integrării formelor diferențiale, limbaj deosebit de util în studiul integralelor funcțiilor de mai multe variabile.

§ 1. INTEGRALA COMPLEXĂ

În acest paragraf introductiv vom defini integrala complexă ca un caz particular al integralei Stieltjes-Riemann, ceea ce ne permite să preluăm un mare număr de rezultate din analiza reală.

Integrala complexă seamănă cu integrala curbilinie; vom integra o funcție continuă de-a lungul unui drum rectificabil oarecare.

3.1. Definiție. Fie $[a, b]$ un segment real iar f o aplicație a segmentului $[a, b]$ în $\mathbb{C}$ și $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ o diviziune a segmentului $[a, b]$. Vom nota $\|\Delta\| = \max\{t_k - t_{k-1} : k \in \overline{1, n}\}$. Prin *variația pe* Δ *a lui* f, înțelegem suma :

$$V(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

iar marginea superioară a acestor variații, cînd Δ parcurge mulțimea tuturor diviziunilor segmentului $[a, b]$ se notează cu $V(f, [a, b])$ și se numește *variația totală a lui* f pe $[a, b]$. Dacă variația totală e finită (adică mulțimea tuturor variațiilor pe diferitele diviziuni e mărginită), atunci f e cu *variație mărginită*. Dacă γ e un drum cu variație mărginită el se numește *drum rectificabil* și variația lui totală e lungimea drumului pe care o notăm cu $V(\gamma)$.

Un contur e un drum rectificabil închis.

3.2. *Observații*. 1. În cazul unui drum γ (vezi figura 3.2) interpretarea geometrică a variației pe Δ este lungimea unei linii poligonale cu vîrfurile în $\gamma(t_k)$.

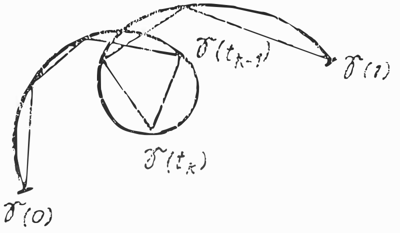


Fig. 3.2.

2. Dacă $f = u + iv$, atunci $\left.\begin{array}{l}|u(t_k) - u(t_{k-1})| \\ |v(t_k) - v(t_{k-1})|\end{array}\right\} \leqslant |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leqslant$ $\leqslant |u(t_k) - u(t_{k-1})| + |v(t_k) - v(t_{k-1})|$ deci f e cu variație mărginită exact atunci cînd u și v sînt cu variație mărginită. Această legătură dintre condiția de mărginire a variației la funcții complexe și la funcții reale, permite transpunerea unor teoreme din analiza reală la funcții complexe.

3. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{C}$ sînt cu variație mărginită atunci f. g și $\alpha f + \beta g$ sînt cu variație mărginită ($\alpha, \beta \in \mathbf{C}$).

Fie $a<c<b$; f este cu variație mărginită pe $[a, b]$ atunci și numai atunci cînd f e cu variație mărginită pe $[a, c]$ și $[c, b]$. Proprietatea de a fi cu variație mărginită se transmite de la f la $|f|$.

4. Orice drum poligonal e rectificabil și variația ei totală este lungimea drumului.

5. Orice drum γ poate fi aproximat uniform cu drumuri poligonale. Într-adevăr, asociem fiecărei diviziuni $\Delta = (t_0, t_1, \ldots t_n)$ a intervalului $[0,1]$ un drum poligonal γ_Δ astfel încît pentru orice $t \in [t_{k-1}, t_k]$ definim

$$\gamma_\Delta(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}}\,\gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\,\gamma(t_k)$$

Evident avem $\gamma_\Delta(t_k) = \gamma(t_k)$ adică drumul poligonal γ_Δ are vîrfurile pe $\{\gamma\}$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\eta > 0$ pentru care $\|\Delta\| < \eta$ implică $|\gamma(t) - \gamma_\Delta(t)| < \varepsilon$ oricare ar fi $t \in [0,1]$. Într-adevăr γ fiind uniform continuă pe $[0,1]$ va exista $\eta > 0$ astfel încît $|t' - t''| < \eta$ să implice $|\gamma(t') - \gamma(t'')| < \varepsilon$. Fie Δ o diviziune cu $\|\Delta\| < \eta$ și $t \in [t_{k-1}, t_k]$). Notînd

$\alpha_k = \dfrac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}}$ și $\beta_k = \dfrac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$ vom avea $\alpha_k + \beta_k = 1$ deci $|\gamma(t) - \gamma_\Delta(t)| =$

$$= |(\alpha_k + \beta_k)\gamma(t) - [\alpha_k\gamma(t_{k-1}) + \beta_k\gamma(t_k)]| =$$

$$= |\alpha_k[\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})] + \beta_k[\gamma(t) - \gamma(t_k)]| < \alpha_k\varepsilon + \beta_k\varepsilon = \varepsilon$$

6. Fie $(\gamma_n\,;\ n \in \mathbf{N})$ un şir de drumuri din mulţimea deschisă G ce converge uniform către γ, $\{\gamma\} \subset G$ iar f o aplicaţie continuă din G în $\mathbf{C}$. Atunci şirul $f \circ \gamma_n$ de drumuri converge uniform către $f \circ \gamma$. Într-adevăr fiind dat $\varepsilon > 0$ alegem un $\eta > 0$ astfel încît $\overline{U}\ (\gamma\,;\,\eta) = \cup\,\{\overline{U}\ (\gamma(t)\,;\ \eta):\ t \in [0,1]\}$ să fie inclus în G. f fiind uniform continuă pe mulţimea compactă $\overline{U}(\gamma,\,\eta)$, va exista un $\eta_1 > 0$ mai mic decît η şi pentru care $|z' - z''| < \eta_1$ implică $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ pentru orice $z',\ z'' \in \overline{U}\ (\gamma\,;\ \eta)$. Alegem un $n_0 \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $|\gamma(t) - \gamma_n(t)| < \eta_1$ pentru orice $t \in [0,\,1]$ şi $n \geqslant n_0$ şi atunci avem $|f\,(\gamma(t)) - f(\gamma_n(t))| < \varepsilon$.

3.9. **Integrala Stieltjes-Riemann a unei funcţii complexe de o variabilă reală.** Considerăm mai întîi două aplicaţii u, U ale segmentului $[a,\ b] \subset \mathbf{R}$ în $\mathbf{R}$ şi notăm

$\sigma(u,\,U,\,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} u(\tau_k)\ .\ [U(t_k) - U(t_{k-1})]$ unde Δ e o diviziune a segmentului $[a,\ b]$ iar $\tau_k \in [t_{k-1},\ t_k]$. Dacă există un număr real I astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $\eta > 0$ cu proprietatea că $\|\Delta\| < \eta$ implică $|I - \sigma\ (u,\,U,\,\Delta)| < \varepsilon$, atunci spunem că u este integrabilă în raport cu U pe $[a,\ b]$ (în sens Stieltjes-Riemann) şi notăm

$$I = \int_a^b u\,dU$$

Sînt cunoscute din analiză proprietăţile acestei integrale — vezi de exemplu [21] vol. II pag. 25—39).

Fie acum $f = u + iv$ şi $F = U + iV$ două funcţii definite pe $[a,\ b]$ cu valori în $\mathbf{C}$. Vom spune că f este *integrabilă în raport cu F pe* $[a,\ b]$ (în sens Stieltjes-Riemann), dacă u şi v sînt integrabile atît în raport cu U cît şi cu V pe $[a,\ b]$ şi notăm

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^b u\,dU - \int_a^b v\ dV + i\int_a^b u\,dV + i\int_a^b v\,dU$$

3.4. **Propoziţie.** *Dacă f e integrabilă în raport cu F pe $[a,\ b]$, şi asociem fiecărei diviziuni $\Delta = (t_0,\,t_1,\,\ldots,\,t_n)$ a segmentului $[0,\ 1]$ suma*

$$\sigma(f,\,F,\,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\ [F\ (t_k) - F(t_{k-1})]$$

atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ putem găsi un $\eta > 0$ astfel încît $\|\Delta\| < \eta$ să implice $\left|\int_a^b f\ dF - \sigma\,(f,\,F,\,\Delta)\right| < \varepsilon$.

Într-adevăr, $\sigma(f,\,F,\,\Delta) = \sigma(u,\ U,\ \Delta) - \sigma(v,\,V,\,\Delta) + i\ \sigma\ (u,\,V,\,\Delta + {} + i\sigma\ (v,\,U,\,\Delta)$, de unde se deduce uşor afirmaţia.

Din proprietățile integralei reale Stieltjes-Riemann rezultă următoarele proprietăți ale integralelor complexe Stieltjes-Riemann:

3.5. **Propoziție.** *Fie* $f = u + iv, F = U + iV$, f_n, F_n *aplicații din* $[a, b]$ *în* $\mathbf{C}$, $\alpha_1, \alpha_2, \in \mathbf{C}$.

Sînt valabile următoarele proprietăți:

1) *Dacă* f *e integrabilă în raport cu* F, *atunci* F *e integrabilă în raport cu* f *și*

$$\int_a^b f\,dF + \int_a^b F\,df = f(b)\cdot F(b) - f(a)\cdot F(a)$$

2) *Dacă* f_1 *și* f_2 *sînt integrabile în raport cu* F, *atunci* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ *e integrabilă după* F *și*

$$\int_a^b (\alpha_1 \,.\, f_1 + \alpha_2 f_2)\,dF = \alpha_1 \int_a^b f_1\,dF + \alpha_2 \int_a^b f_2\,dF$$

3) *Dacă* f *e continuă,* F *cu variație mărginită pe* $[a, b]$, *atunci* f *e integrabilă pe* $[a, b]$ *în raport cu* F.

4) *Fie* $(f_n\,;\, n \in \mathbf{N})$ *un șir de funcții continue care converge uniform pe* $[a, b]$ *către* f, $(F_n\,;\, n \in \mathbf{N})$ *un șir de funcții cu variație mărginită care converge simplu către* F *iar șirul* $V(F_n, [a, b])$ *e mărginit, atunci*

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ k\to+\infty}} \int_a^b f_n\,dF_k = \int_a^b f\,dF.$$

5) *Dacă* f *e continuă iar* F *derivabilă cu derivată continuă pe* $[a, b]$, *atunci* f *e integrabilă în raport cu* F *și*

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^b f(t)\,F'(t)\,dt$$

unde integrala din dreapta este egală cu

$$\int_a^b [u(t)\,U'(t) - v(t)\,V'(t)]\,dt + i\int_a^b [u(t)\,V'(t) + v(t)\,U'(t)]\,dt$$

6) *Dacă* $a < c < b$ *și* f *e integrabilă în raport cu* F *atît pe* $[a, c]$ *cît și pe* $[c, b]$, *atunci* f *e integrabilă în raport cu* F *pe* $[a, b]$ *și*

$$\int^b f\,dF = \int_a^c f\,dF + \int^b f\,dF$$

Teoremele de mai sus pot fi demonstrate și direct dacă se consideră proprietatea de la (3.4), ca definiția integrabilității — (vezi [6] pag. 145—158).

Să arătăm aici doar o ultimă proprietate.

7) *Dacă* f *e integrabilă în raport cu* F pe $[a, b]$, *iar* h *este un omeomorfism de la* $[a', b']$ *la* $[a, b]$, $\mathrm{h}(a') = a$, $\mathrm{h}(b') = b$, *atunci* $\mathrm{f} \circ \mathrm{h}$ *e integrabilă în raport cu* $\mathrm{F} \circ \mathrm{h}$ pe $[a', b']$ *și*

$$\int_a^b \mathrm{f}\, d\mathrm{F} = \int_{a'}^{b'} (\mathrm{f} \circ \mathrm{h})\, d\, (\mathrm{F} \circ \mathrm{h})$$

Demonstrație. Dacă $\mathrm{f} = \mathrm{u} + i\mathrm{v}$, $\mathrm{F} = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$, atunci $\mathrm{f} \circ \mathrm{h} = (\mathrm{u} \circ \mathrm{h}) + i\,(\mathrm{v} \circ \mathrm{h})$ și $\mathrm{F} \circ \mathrm{h} = (\mathrm{U} \circ \mathrm{h}) + i\,(\mathrm{V} \circ \mathrm{h})$ și vom arăta că $\int_{a'}^{b'} (\mathrm{u} \circ \mathrm{h})d(\mathrm{U} \circ \mathrm{h}) = \int_a^b \mathrm{u}\, d\mathrm{U}$. În mod analog rezultă că

$$\int_{a'}^{b'} (\mathrm{u} \circ \mathrm{h})\; d(\mathrm{V} \circ \mathrm{h}) = \int_a^b \mathrm{u}\, d\mathrm{U} \text{ etc.}$$

Fie $I = \int_a^b \mathrm{u}\, d\mathrm{U}$ și $\varepsilon > 0$. Va exista un $\eta_1 > 0$ astfel încît să avem $|I - \sigma(\mathrm{u}, \mathrm{U}, \Delta)| < \varepsilon$ de îndată ce $\|\Delta\| < \eta_1$. h fiind un omeomorfism al lui $[a', b']$ și $\mathrm{h}(a') = a$, h va fi strict crescătoare și uniform continuă, deci există un $\eta > 0$ astfel ca $|\mathrm{h}(t') - \mathrm{h}(t'')| < \eta_1$ pentru orice $t', t'' \in [a, b]$ cu $|t' - t''| < \eta$. Fie $\Delta' = (t'_0, t'_1, t'_2, \ldots t'_n)$ o diviziune a lui $[a', b']$. $\|\Delta'\| < \eta$ și $\tau'_k \in [t'_{k-1}, t'_k]$. Notînd $t_k = \mathrm{h}(t'_k)$, $\tau_k = \mathrm{h}(\tau'_k)$ $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ va fi o diviziune a lui $[a, b]$ și $\|\Delta\| < \eta_1$ iar $\sigma(\mathrm{u} \circ \mathrm{h}, \mathrm{U} \circ \mathrm{h}, \Delta') = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{u} \circ \mathrm{h})\,(\tau'_k)[(\mathrm{U} \circ \mathrm{h})\,(t'_k) - (\mathrm{U} \circ \mathrm{h})\,(t'_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{u}(\tau_k)\,[\mathrm{U}\,(t_k) - \mathrm{U}(t_{k-1})] = \sigma(\mathrm{u}, \mathrm{U}, \Delta)$, deci, $|I - \sigma(\mathrm{u} \circ \mathrm{h}, \mathrm{U} \circ \mathrm{h}, \Delta')| = |I - \sigma(\mathrm{u}, \mathrm{U}, \Delta)| < \varepsilon$.

Prin urmare $\mathrm{u} \circ \mathrm{h}$ e integrabilă în raport cu $\mathrm{U} \circ \mathrm{h}$ și $\int_a^b \mathrm{u}\, d\mathrm{U} =$

$$= \int_{a'}^{b'} (\mathrm{u} \circ \mathrm{h})d(\mathrm{U} \circ \mathrm{h}).$$

Integrala Stieltjes-Riemann are în teoria noastră doar un rol secundar, fiind folosită pentru definirea integralei complexe.

3.6. Integrala complexă. Fie γ un drum rectificabil din iar f o funcție continuă pe suportul $\{\gamma\}$ al drumului, cu valori în $\mathbf{C}$. Atunci $\mathrm{f} \circ \gamma$ va fi continuă pe $[0, 1]$, deci integrabilă pe $[0,1]$ în raport cu γ. Această integrală Stieltjes-Riemann se numește *integrală complexă* (sau *integrală Cauchy*) a lui f de-a lungul drumului γ și notăm

$$\int_0^1 (\mathrm{f} \circ \gamma)\, d\gamma = \int_\gamma \mathrm{f}(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \mathrm{f}\,\cdot$$

De exemplu să calculăm $I = \int\limits_{\delta U(0:1)} \overline{\zeta} d\,\zeta$

Drumul $\gamma = \delta U(0;1)$ de integrare e circular (vezi (2.7)) şi $\gamma(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ are derivata continuă $\gamma'(t) = 2\pi i (\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)$ şi $I = \int\limits_0^1 (f \circ \gamma)\, d\gamma = 2\pi i \int\limits_0^1 (\cos 2\pi t - i \sin 2\pi t).(\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)\, dt = 2\pi i \int\limits_0^1 dt = 2\pi i.$

Putem defini integrala unei funcţii f şi de-a lungul unei *curbe* Γ (vezi 2.20). Fie Γ o curbă din $\mathbb{C}$, şi presupunem că Γ e rectificabilă, adică admite o reprezentare parametrică rectificabilă γ_1. (Se constată uşor că în acest caz orice reprezentare γ_2 a ei este rectificabilă). Dacă f este continuă pe $\{\gamma_1\}$, atunci prin *integrala lui* f *de-a lungul curbei* Γ înţelegem integrala lui f de-a lungul lui γ_1. Dacă γ_2 e un alt element din Γ, atunci există un omeomorfism h crescător astfel încît $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$. γ_1 fiind cu variaţie mărginită, $f \circ \gamma_1$ e integrabilă după γ_1 pe $[0, 1]$ şi aplicăm (3.5.7); $f \circ \gamma_1 \circ h$ va fi integrabilă după $\gamma_1 \circ h$, adică $f \circ \gamma_2$ după γ_2 şi $\int\limits_{\gamma_2} f = \int\limits_{\gamma_1} f$

Prin urmare integrala nu depinde de reprezentarea parametrică aleasă şi o vom nota cu $\int\limits_{\Gamma} f$.

3.7. Proprietăţile integralei complexe. *Fie* $\gamma \in \mathscr{D}(z_1, z_2)$ $\gamma_1 \in \mathscr{D}(z_2, z_3)$ *drumuri rectificabile,* g, f *aplicaţii continue din* $\{\gamma\}$ *în* $\mathbb{C}$, α, $\beta \in \mathbb{C}$. *Atunci*

1) $\int\limits_{\gamma} \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_{\gamma} f + \beta \int\limits_{\gamma} g$

2) $\int\limits_{\gamma^-} f = - \int\limits_{\gamma} f$

3) *Dacă* f *e continuă şi pe* $\{\gamma_1\}$, *atunci*

$$\int\limits_{\gamma \cup \gamma_1} f = \int\limits_{\gamma} f + \int\limits_{\gamma_1} f$$

4) *Dacă* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ *e o descompunere a lui* γ *atunci*

$$\int\limits_{\gamma} f = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f$$

5) *Dacă* $|f(\gamma(t))| \leqslant M$, *pentru orice* $t \in [0,1]$, *atunci*

$$\left| \int\limits_{\gamma} f \right| \leqslant M \cdot V(\gamma)$$

6) *Dacă* γ *e un drum liniar, atunci*

$$\int_{\gamma} f = (z_2 - z_1)\int_{0}^{1} f[(1-t)z_1 + tz_2]\,dt$$

7) *Dacă* G *e o mulțime deschisă din* $\mathbf{C}$, $f : G \to \mathbf{C}$ *e continuă,* $(\gamma_n : n \in \mathbf{N})$ *un șir de drumuri rectificabile cu suport în* G *ce converge uniform pe* $[0, 1]$ *către* γ, $\{\gamma\} \subset G$, *și mulțimea* $V(\gamma_n)$ *e mărginită, atunci* $\int_{\gamma_n} f$ *e un șir convergent de numere complexe și*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f = \int_{\gamma} f$$

8) *Dacă* γ *e un drum rectificabil din* $\mathbf{C}$, $(f_n : n \in \mathbf{N})$ *un șir de aplicații continue din* $\{\gamma\}$ *în* $\mathbf{C}$ *uniform convergent pe* $\{\gamma\}$ *către* f, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f$$

9) *Dacă* γ_1 *e un drum rectificabil din* $\mathbf{C}$, γ_1 *echivalent cu* γ_2 *și* f *continuă pe* $\{\gamma_1\}$, *atunci* $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

Demonstrație. Proprietatea 1) rezultă din (3.5.2), 7) și 8) din (3.5.4), și (3.2.6). Proprietatea 9) s-a demonstrat la (3.6), iar 5) se deduce din (3.4), căci sumele integrale ale lui $\int_{\gamma} f$ sînt $\sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\tau_k))\,[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]$ și modulul acestei sume e majorat de $M \,.\, V(\gamma)$.

6) Dacă $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, atunci γ e derivabilă și $\gamma'(t) = z_2 - z_1$, deci $\int_{\gamma} f = \int_{0}^{1} (f \circ \gamma)\,d\gamma = (z_2 - z_1) \,.\, \int_{0}^{1} f\,[(1-t)z_1 + tz_2)\,dt$.

2), 3), 4) se demonstrează pornind de la definiția operațiilor efectuate asupra drumurilor. Suma integrală a lui $\int_{\gamma^-} f$ corespunzătoare lui $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ este $\sigma(f \circ \gamma^-, \gamma^-, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(1-\tau_k))\,[\gamma(1-t_k) - \gamma(1-t_{k-1})]$.

Notînd $t'_k = 1 - t_{n-k}$, $\tau'_k = 1 - \tau_{n-k+1}$, $\Delta' = (t'_0, t'_1, \ldots, t'_n)$ va fi o nouă diviziune a lui $[0,1]$ și $\tau'_k \in [t'_{k-1}, t'_k]$ deci înlocuind $n - k + 1 = m$, obținem

$$\sigma(f \circ \gamma^-, \gamma^-, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\tau'_{n-k+1}))[\gamma(t'_{n-k}) - \gamma(t'_{n-k+1})] =$$

$$= -\sum_{m=1}^{n} f(\gamma(\tau'_m))[\gamma(t'_m) - \gamma(t'_{m-1})] = -\sigma(f \circ \gamma, \gamma, \Delta')$$

și $\|\Delta\| = \|\Delta'\|$. Prin urmare $\int\limits_{\gamma} f = -\int\limits_{\gamma^-} f$.

3) e un caz particular al formulei 4) $\left(\text{alegînd } n = 2 \text{ și diviziunea } \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)\right)$. Rămîne să demonstrăm că $(\gamma, \ldots, \gamma_n)$ fiind descompunerea lui γ după diviziunea $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ avem

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f = \int\limits_{\gamma} f.$$

Prin definiție (2.12) avem $\gamma_k = \gamma \circ h_k$, unde h_k e un omeomorfism al lui $[0,1]$ pe $[t_{k-1}, t_k]$, și descompunînd integrala avem

$$\int\limits_{\gamma} f = \int_0^1 (f \circ \gamma)\, d\gamma = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f \circ \gamma)\, d\gamma \quad \text{iar}$$

$$I_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f \circ \gamma)\, d\gamma = \int_0^1 (f \circ \gamma \circ h)\, d(\gamma \circ h_k)$$

conform (3.5.7) deci $I_k = \int_0^1 f \circ \gamma_k \, d\gamma_k = \int\limits_{\gamma_k} f$, deci $\int\limits_{\gamma} f = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f$.

3.8. *Observații și exemple.* 1) Partea reală și cea imaginară a lui $\int\limits_{\gamma} f$ poate fi calculată în felul următor:

Dacă $f = u + iv$, $\gamma = \alpha + i\beta$, atunci $\int\limits_{\gamma_1} f = \int_0^1 (f \circ \gamma)\, d\gamma = \int_0^1 [u(\alpha, \beta)\, d\alpha -$

$- v(\alpha, \beta)\, d\beta] + i \int_0^1 [u(\alpha, \beta)\, d\beta + v(\alpha, \beta)\, d\alpha]$.

Aceste două integrale sînt integrale Stieltjes-Riemann reale sau pot fi considerate și ca integrale curbilinii de speța a doua, căci acestea se calculează tocmai ca integralele Stieltjes-Riemann

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (u\, d\, \alpha - v\, d\, \beta) + i \int_\gamma (u\, d\, \beta + v\, d\, \alpha)$$

2) Putem defini în analogie cu derivarea formală după ξ şi integrarea formală după $d\bar\xi$ prin

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\bar\zeta \underset{\mathrm{def}}{=} \overline{\int_\gamma \bar f(\zeta)\, d\zeta}$$

3) Pentru a găsi o corespondentă complexă şi integralelor curbilinii de speţa întîi putem considera sumele integrale

$$\tilde\sigma(f \circ \gamma, \gamma, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} (f \circ \gamma)(\tau_k)\, |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

şi limita lor o notăm cu $\int_\gamma f(\zeta)\, |d\zeta|$. Dacă γ are derivată continuă vom avea

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)\, |d\zeta| = \int_0^1 f(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt =$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t)) \sqrt{\alpha'^2(t) + \beta'^2(t)}\, dt = \int_\gamma f\, d\, s$$

tocmai integrala curbilinie de speţa întîi .

4) Cu ajutorul integralei introduse la 3) putem da o nouă formulă de majorare care e uneori mai avantajoasă decît (3.7.5) şi anume, din

$$|\sigma(f \circ \gamma, \gamma, \Delta)| = |\sum (f \circ \gamma)(\tau_k)\, [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]| \leqslant$$

$$\leqslant \sum |(f \circ \gamma)(\tau_k)| \cdot |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| =$$

$$= \tilde\sigma(|f| \circ \gamma, \gamma, \Delta)$$

rezultă

$$\left| \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant \int_\gamma |f(\zeta)|\, |d\zeta|.$$

5) Putem arăta că integrala $I = \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2)\, dt$ tinde către $f(z_1)$, dacă z_2 tinde către z_1. Într-adevăr, $f(z_1) = \int_0^1 f(z_1)\, dt$ şi pentru $\varepsilon > 0$

există un $\eta > 0$ astfel ca $|z' - z''| < \eta$ să implice $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. Dacă $|z_2 - z_1| < \eta$, atunci $|((1-t)z_1 + tz_2) - z_1| = |t|\,|z_2 - z_1| \leqslant |z_2 - z_1| < \eta$, deci $|f((1-t)z_1 + tz_2) - f(z_1)| < \varepsilon$, pentru orice $t \in [0,1]$, prin urmare

$$|I - f(z_1)| = \left|\int_0^1 [f((1-t)z_1 + tz_2) - f(z_1)]\,dt\right| < \varepsilon.$$

6) Din (3.7.5) rezultă imediat că pentru un drum punctual γ avem $\int_\gamma f = 0$.

7) Să calculăm $I = \int_\gamma f$ și să-i aplicăm formulele de majorare (3.7.5) și (3.8.4) pentru $\gamma(t) = 1+t$, $f(z) = z$. Integrala o putem calcula conform (3.6), și (3.5.5) prin

$I = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (1+t)\,dt = \frac{3}{2}$. Cum $V(\gamma)=1$ și $M = \sup\{|f(\gamma(t))| : t \in [0, 1]\} = 2$, formula (3.7.5) ne dă $|I| \leqslant 2$, și $I_1 = \int_\gamma |f(\zeta)|\,|d\zeta| = \int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, unde $x = 1+t$, $y = 0$, deci $I_1 = \int_0^1 (1+t)\,dt = \frac{3}{2}$ deoarece $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$. Prin urmare formula (3.8.4) ne dă $|I| \leqslant \frac{3}{2}$ și avem chiar egalitate. (Acest rezultat se datorează faptului că $f(\gamma(t))$ ia valori reale și pozitive la fel ca și $\gamma'(t)$.)

8) Să se calculeze $\int_\gamma f$, unde $f(z) = \frac{z}{|z|}$, iar $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, unde γ_1 și γ_3 sînt drumuri liniare ce leagă -3 de -2 respectiv 2 de 3, iar $\gamma_2(t) = 2\,[\cos \pi(1-t) + i \sin \pi(1-t)]$. Funcția f e continuă pe $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, iar $\{\gamma\}$ e inclusă în această mulțime, deci integrala există, căci γ e un drum rectificabil și integrala va fi egală cu $I_1 + I_2 + I_3 = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f$. Calculăm I_k cu ajutorul formulei $I_k = \int_0^1 f(\gamma_k(t))\,\gamma_k'(t)\,dt$ și obținem $I_1 = -1$, $I_2 = 0$ și $I_3 = +1$ deci $\int_\gamma f = 0$.

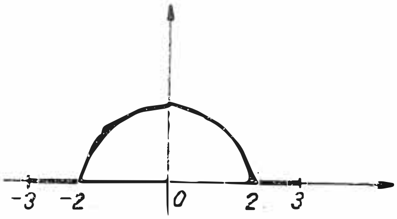


Fig. 3.8

§ 2. TEOREMA LUI CAUCHY

3.9. **Definiție.** Dacă $g \in \mathscr{H}(G)$ și $g'(z) = f(z)$ pentru orice $z \in G$, atunci spunem că g e o *primitivă* a lui f pe G.

Ca și în analiza reală nu orice funcție f admite primitivă. Mai mult însă, după cum vom constata, nici măcar funcțiile continue nu admit toate primitive. Dacă încercăm să transpunem pentru funcții complexe construcția primitivei unei funcții reale continue f dată de formula

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

va trebui să alegem un drum ce leagă un punct fix z_1 cu un punct variabil z printr-un drum rectificabil γ_z. Pentru ca acesta să existe trebuie să admitem că G este un domeniu.

Dar $\int_{\gamma_z} f$ va depinde în general nu numai de z ci și de drumul ales. Rezultatul central al acestui paragraf e teorema lui Cauchy (3.16) — care permite să găsim condiții simple care să garanteze că două integrale $\int_{\gamma_1} f$ și $\int_{\gamma_2} f$ să fie egale. Prin aceasta vom putea arăta că pe un domeniu simplu conex olomorfia unei funcții implică existența primitivei.

Mai întîi căutăm un criteriu pentru existența primitivei.

3.10. **Teorema de legătură dintre primitivă și integrală.** Fie D *un domeniu din* $\mathbb{C}$ $f : D \to \mathbb{C}$ *o funcție continuă. Atunci:*

a) Dacă $\int_\gamma f = 0$ *pentru orice contur* γ *din* D *atunci* f *admite o primitivă pe* D.

b) *Dacă* f *admite o primitivă* g *în* D, *atunci pentru orice drum rectificabil* γ *din* D *are loc formula lui Newton-Leibniz:*

$$\int_\gamma f = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)),$$

iar dacă γ *e un contur*

$$\int_\gamma f = 0 \cdot$$

Demonstrație. a) Dacă $\int_\gamma f = 0$ pentru orice contur γ din D, fie z un punct variabil din D și z_1 un punct fixat. D, fiind un domeniu, e poligonal conex (2.19), deci există o linie poligonală γ_z în D ce unește z_1 cu z și fie

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f.$$

Să arătăm că $g'(z_0) = f(z_0)$ în orice $z_0 \in D$. Pentru a calcula $g(z) - g(z_0) = \int_{\gamma_z} f - \int_{\gamma_{z_0}} f$, alegem $\varepsilon > 0$ suficient de mic pentru ca $U(z_0\,;\,\varepsilon) \subset D$ și fie $z \in U\,(z_0\,;\,\varepsilon)$ iar $\gamma = \gamma_z \cup \tilde{\gamma}^- \cup \gamma_{z_0}^-$, unde $\tilde{\gamma}$ e drumul liniar de la z_0 la z. Atunci γ e un contur și folosind (3.7.3) și (3.7.2) avem

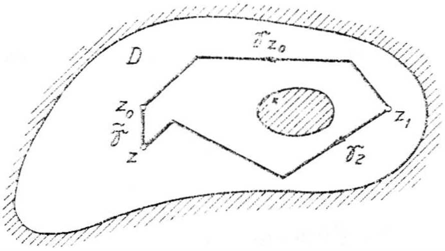


Fig. 3.10

$$0 = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_z} f - \int_{\gamma_{z_0}} f - \int_{\tilde{\gamma}} f, \text{ deci}$$

$$g(z) - g(z_0) =$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}} f = (z - z_0)\int_0^1 f\,[(1-t)\,z_0 + tz]\,dt,$$

după (3.7.6) deci

$\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \displaystyle\int_0^1 f\,[(1-t)\,z_0 + tz]\,dt$. Această integrală are conform (3.8.5) limita $f(z_0)$ cînd z tinde la z_0, deci $g'(z_0)$ există și e egală cu $f(z_0)$.

b) Fie g o primitivă a lui f și γ un drum *poligonal* din D. Atunci există o diviziune $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ ce-l descompune în drumuri liniare și pe $[t_{k-1}, t_k]$ γ va fi derivabilă. Ținînd cont că aici

$$[g(\gamma(t))]' = g'(\gamma\,(t)) \cdot \gamma'(t), \text{ avem}$$

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f \circ \gamma)\, d\gamma = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(\gamma(t))\,\gamma'\,(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [g(\gamma(t))]'\,dt = \sum_{k=1}^{n} [g\,(\gamma(t_k)) - g(\gamma\,(t_{k-1}))] =$$

$$= g\,(\gamma(t_n)) - g(\gamma(t_0)) = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)).$$

Dacă γ nu e o linie poligonală, există, conform cu (3.2.5) un șir γ_n de drumuri poligonale în D ce converge uniform către γ, $\gamma_n(0) = \gamma\,(0)$, $\gamma_n(1) = \gamma(1)$ și $V(\gamma_n) \leqslant V(\gamma)$.

$$\int_{\gamma_n} f = g\,(\gamma_n(1)) - g(\gamma_n(0)) = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0))$$

și trecînd la limită conform (3.7.7), obținem formula Newton-Leibniz.

3.11. *Observații.* 1) Dacă g e o primitivă a lui f, atunci $g + c$ e evident altă primitivă pentru orice $c \in \mathbf{C}$. Dacă f e definită pe un domeniu, orice primitivă e de această formă în virtutea proprietății că singurele funcții cu derivată identic nulă pe un domeniu sînt constantele.

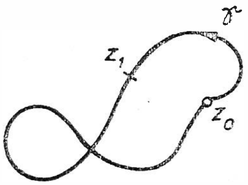


Fig. 3.11.2

2) Integrala lui f pe un contur nu depinde de punctul de pornire. Prin această formulare înțelegem următoarele: γ fiind un contur și $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$, alegem un punct oarecare al drumului $z_1 = \gamma(t_1)$. Atunci diviziunii $(0, t_1, 1)$ îi corespunde descompunerea (γ_1, γ_2) și $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$. Atunci $\tilde{\gamma} = \gamma_2 \cup \gamma_1$ va fi un alt contur cu aceeași imagine, dar $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = z_1$ și $\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\gamma} f$.

3) Funcția $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ deși e continuă și derivabilă în $D = \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ nu admite primitivă în D, deoarece

$$I = \int_{\delta U(z_0\,:\,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt, \text{ unde}$$

$$\gamma(t) = z_0 + r\, e^{2\pi i t}, \text{ deci}$$

$$I = \int_0^1 \frac{2\pi\, i r\, e^{2\pi r t}}{r\, e^{2\pi r t}}\, dt = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi,$$

diferit de zero.

În schimb pentru orice m întreg diferit de 1, funcția $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^m}$ are primitivă: $g(z) = \dfrac{1}{(1 - m)(z - z_0)^{m-1}}$ deci $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^m} = 0$.

4) Vom căuta să găsim condiții care să asigure existența primitivei; conform teoremei primitivei, problema e echivalentă cu condiția anulării integralei pe orice contur. Vom căuta teoreme care să asigure anularea integralei pe anumite contururi.

5) Definim *drumul triunghiular* în felul următor: Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ și $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sînt drumurile liniare din z_2 în z_3, din z_3 în z_1, respectiv din z_1 în z_2, atunci prin $\delta(z_1, z_2, z_3)$ înțelegem drumul $\lambda_3 \cup (\lambda_1 \cup \lambda_2)$, iar prin $T = T(z_1, z_2, z_3)$ mulțimea $\{a z_1 + b z_2 + c z_3 : a, b, c \in \mathbf{R}_+^*,\ a + b + c < 1\}$. Se verifică ușor că T e format din punctele interioare triunghiului, iar $\gamma = \delta(z_1, z_2, z_3)$ ca drum poligonal e un drum rectificabil, iar $V(\gamma)$ e perimetrul triunghiului.

3.12. **Teorema lui Cauchy pentru triunghiuri.** *Fie* z_1, z_2, z_3 *trei puncte necoliniare*, $T = T(z_1, z_2, z_3)$, $\gamma = \delta(z_1, z_2, z_3)$, *iar* f *o funcție olomorfă pe* T *și continuă pe* $\overline{T}$. *Atunci*

$$\int_\gamma f = 0$$

Demonstrație. (Goursat). 1) Fie $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)} \in T$ și să arătăm că pentru $\gamma_1 = \delta(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)})$ avem $I_1 = \int_{\gamma_1} f = 0$. Fie prin absurd $I_1 \neq 0$ și fie $l_1 = V(\gamma_1)$ perimetrul triunghiului $T_1 = T(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)})$. Să presupunem că am găsit drumurile triunghiulare $\gamma_k = \delta(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_3^{(k)})$ și domeniile $T_k = T(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_3^{(k)})$ de perimetru $l_k = 2^{1-k} \cdot l_1$ astfel ca $\overline{T}_1 \supset \overline{T}_2 \supset \ldots \supset \overline{T}_k$, iar modulul lui $I_k = \int_{\gamma_k} f$ e mai mare ca 4^{1-k}. $|I_1|$ și vrem să-l construim pe γ_{k+1}.

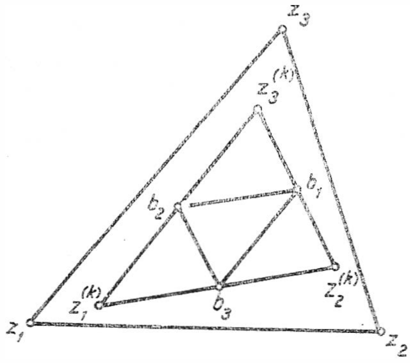


Fig. 3.12

Fie $b_1 = 2^{-1} \ (z_2^{(k)} + z_3^{(k)})$, $b_2 = 2^{-1}(z_3^{(k)} + z_1^{(k)})$, $b_3 = 2^{-1}(z_3^{(k)} + z_1^{(k)})$ mijloacele laturilor și, formăm $\gamma' = \delta(z_1^{(k)}, b_3, b_2)$, $\gamma'' = \delta(b_3\, z_2^{(k)}\, b_1)$, $\gamma''' = \delta(b_3, b_1, b_2)$, $\gamma^{IV} = \delta(b_1, z_3^{(k)}, b_2)$. Atunci, $\int_{\gamma_k} f = \int_{\gamma'} f + \int_{\gamma''} f + \int_{\gamma'''} f + \int_{\gamma^{IV}} f$, deci

$$|I_k| = \left|\int_{\gamma_k} f\right| \leqslant \left|\int_{\gamma'} f\right| + \left|\int_{\gamma''} f\right| + \left|\int_{\gamma'''} f\right| + \left|\int_{\gamma^{IV}} f\right|$$

și cel puțin unul din termenii din dreapta va fi mai mare ca $4^{-1}\,|I_k|$ Notăm acest drum triunghiular cu γ_{k+1}, interiorul cu T_{k+1}, $\int_{\gamma_{k+1}} f = I_{k+1}$.

Perimetrul triunghiului, l_{k+1} este egal cu $2^{-1}.\ l_k$, deci $l_{k+1} = 2^{1-(k+1)}\, l_1$, $\overline{T}_k \supset \overline{T}_{k+1}$, iar $I_{k+1} \geqslant 4^{-1} \cdot |I_k| \geqslant 4^{1-(k+1)}\, |I_1|$.

Am obținut un șir de triunghiuri și mulțimile $\overline{T}_1 \supset \overline{T}_2 \supset \ldots \supset \overline{T}_n \supset \ldots$ sînt părți compacte nevide deci $\cap \{\overline{T}_n : n \in \mathbf{N}^*\}$ e nevidă. Fie z_0 un element al acestei intersecții. Cum $z_0 \in T$, f e diferențiabilă în z_0 și

$$f(z) = f(z_0) - z_0\, f'(z_0) + z f'(z_0) + \alpha(z)(z - z_0),$$

unde α este nulă și continuă în z_0, prin urmare

$$\int_{\gamma_n} f = [f(z_0) - z_0 f'(z_0)] \int_{\gamma_n} d\zeta + f'(z_0) \int_{\gamma_n} \zeta \, d\zeta + \int_{\gamma_n} \alpha(\zeta)\cdot(\zeta - z_0)\, d\zeta.$$

Dar $\int_{\gamma_n} d\zeta = \int_{\gamma_n} \zeta \, d\zeta = 0$ — vezi (3.11.3) cazul $z_0 = 0$, $m = 0$, respectiv $m = -1$ — și alegem $\varepsilon = l_1^{-2} \cdot |I_1| > 0$. Va exista $\eta > 0$ astfel ca $|z - z_0| < \eta$ să implice $|\alpha(z)| < \varepsilon$ și există $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care $l_n = 2^{1-n}\, l_1 < \eta$. Atunci $\overline{T}_n \subset U(z_0; \eta)$ căci pentru orice $\zeta \in \overline{T}_n$ are loc $|\zeta - z_0| \leqslant l_n < \eta$, deci $|\alpha(\zeta)(\zeta - z_0)| < \varepsilon \cdot |\zeta - z_0| \leqslant \varepsilon \cdot l_n$ și aplicînd (3.7.5) avem $4^{1-n} |I_1| \leqslant \left| \int_{\gamma_n} f \right| = \left| \int_{\gamma_n} \alpha(\zeta)(\zeta - z_0)\, d\zeta \right| < \varepsilon \cdot l_n \, V(\gamma_n) = \varepsilon \, . \, l_n^2 = \varepsilon \, . \, 4^{1-n} \, l_1^2 = 4^{1-n} |I_1|$ și am ajuns la o contradicție; avem deci $I_1 = 0$.

2) Alegem acum trei șiruri $a_1^{(n)}$, $a_2^{(n)}$, $a_3^{(n)}$ din T ce converg către z_1, z_2, respectiv z_3, și fie $\tilde{\gamma}_n = \partial(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)})$. Din etapa 1) a demonstrației rezultă $\int_{\tilde{\gamma}_n} f = 0$ și conform (3.7.7), avem

$$\int_{\gamma} f = \lim_{n \to \infty} \int_{\tilde{\gamma}_n} f = 0. \quad \square$$

3.13. Teorema de legătură dintre olomorfie și primitivă. *Fie* D *un domeniu stelat în* z_0, *iar* $d_1, \ldots, d_n$ *drepte ce trec prin* z_0, d *reuniunea lor. Dacă* $f: D \to \mathbf{C}$ *e continuă pe* D *și derivabilă pe* $D \setminus d$ *atunci* f *admite primitivă pe* D.

Demonstrație. Fie γ_z drumul liniar de la z_0 la z. Suportul lui este inclus în D, deci g definită de $g(z) = \int_{\gamma_z} f$ dacă $z \neq z_0$ și $g(z_0) = 0$, aplică D în $\mathbf{C}$. Să arătăm că g e o primitivă a lui f.

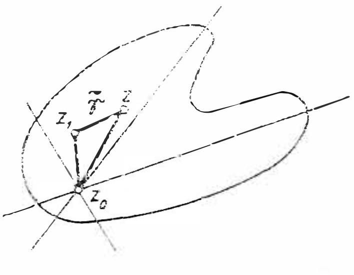


Fig. 3.13

1) Fie $z_1 \in D \setminus d$ și $r_1 = \mathbf{d}(z_1, (\mathbf{C} \setminus D) \cup d)$. Avem $r_1 \in \mathbf{R}^+$ și considerăm $z \in U(z_1; r_1)$. Aplicînd teorema lui Cauchy drumului $\gamma = \partial(z_0, z, z_1) = \gamma_{z_1} \cup \tilde{\gamma} \cup \gamma_z^-$, avem $0 = \int_{\gamma_{z_1}} f + \int_{\tilde{\gamma}} f - \int_{\gamma_z} f$ adică $g(z) - g(z_1) = \int_{\tilde{\gamma}} f$ și $\tilde{\gamma}$ e drumul liniar de la z la z_1, de unde deducem ca în demonstrația (3.10), a) că $g'(z_1) = f(z_1)$.

2) Dacă $z_2 \in (D \cap d) \setminus \{z_0\}$, atunci $z_2 \in d_k$ pentru un k și alegem $r_2 = \mathbf{d}(z_2, (\mathbf{C} \setminus D) \cup (d \setminus d_k))$ și pentru $z \in U(z_2; r_2)$ putem raționa ca la 1), deoarece f e olomorfă în $T(z_0, z, z_2)$ și continuă în $\overline{T}(z_0, z, z_2)$.

3) Mai avem de arătat că $g'(z_0) = f(z_0)$. Avem $g(z_0) = 0$ și conform cu (3.7.6), avem $g(z) = (z-z_0)\int\limits_0^1 f((1-t)z - tz_0)\,dt$, deci $\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \int\limits_0^1 f((1-t)z - tz_0)\,dt$ și aceasta tinde către $f(z_0)$ cînd z tinde către z_0 (vezi 3.8.5).

3.14. *Observație.* 1) Dacă f e continuă pe domeniul D stelat în z_0 și e derivabilă pe D cu excepția unui număr finit de puncte, atunci unindu-le cu z_0 obținem dreptele $d_1, \ldots, d_n$ și din (3.13), deducem că f are primitivă pe D. În particular, pe un domeniu stelat orice funcție olomorfă admite primitivă.

2) Condiția de derivabilitate e aparent foarte restrictivă pentru a asigura existența primitivei. Vom vedea însă mai jos în (3.20), că ea e necesară deoarece în cazul funcțiilor complexe o funcție nederivabilă nu poate avea primitivă.

3) Fie $f(z) = \frac{\sin(z-i)z}{(z-i)z}$ pentru $z \in \mathbf{C} \setminus \{0, i\}$ și $f(0) = f(i) = 1$. Atunci f e derivabilă pe $\mathbf{C} \setminus \{0, i\}$ și continuă în $\mathbf{C}$ deoarece $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$

Prin urmare f admite primitivă în tot planul.

4) Teorema (3.13) se bazează pe teorema lui Cauchy aplicată la drumuri triunghiulare. Teorema lui Cauchy este însă valabilă pentru contururi mult mai generale și constituie un rezultat central al teoriei funcțiilor de o variabilă complexă. Majoritatea teoremelor ce urmează sînt consecințe directe sau indirecte ale teoremei lui Cauchy.

3.15. **Teorema lui Cauchy.** *Dacă* f *e olomorfă pe mulțimea deschisă* G, *iar* γ *e un contur omotop cu zero în* G, *atunci*

$$\int\limits_\gamma f = 0$$

Demonstrație. Cum integrala din f pe un drum punctual e egală cu zero, e suficient să arătăm că dacă γ_0 și γ_1 sînt două contururi din G, omotope în G, atunci $\int\limits_{\gamma_0} f = \int\limits_{\gamma_1} f$

1) Fie $\varphi : S \times T \to G$ deformația lui γ_0 în γ_1, $K = \varphi(S \times T)$ și $\varepsilon = d(K, \partial G)$. Avînd $\varepsilon > 0$ și φ fiind uniform continuă pe $S \times T$, există un $\eta > 0$ astfel încît $|s'-s''| < \eta$ și $|t'-t''| < \eta$ să implice $|\varphi(s', t') - \varphi(s'', t'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ și alegem o diviziune $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ a segmentului

[0,1] de normă mai mică decît η. Vom nota $s_k = t_k$, $z_{j,k} = \varphi(s_j, t_k)$ şi $D_{j,k} = U(z_{j,k};\ \varepsilon)$. Avem $D_{j,k} \subset D$ şi din $\varphi(s, 0) = \varphi(s, 1)$ rezultă că $z_{j,0} = z_{j,n}$, deci $D_{j,0} = D_{j,n}$.

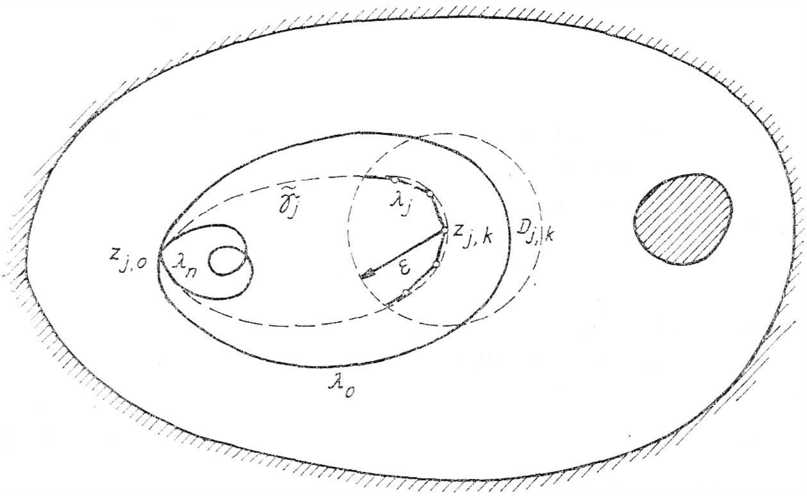


Fig. 3.15

2) Vom alege contururile $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ astfel ca λ_0 să coincidă cu γ_0, γ_1 cu λ_n şi pentru orice $j \in \overline{0,n-1}$, $k \in \overline{1,n}$ şi $t \in [t_{k-1}, t_k]$ — să avem $\lambda_j(t) \in D_{j,k} \cap D_{j+1,k}$ iar $\lambda_n(t) \in D_{n,k}$. În acest scop alegem $\lambda_0 = \gamma_0$, $\lambda_n = \gamma_1$, iar pentru $j \in \overline{1, n-1}$ înlocuim pe $\tilde{\gamma}_j(t) = \varphi(s_j, t)$, care s-ar putea să nu fie rectificabil, printr-un drum poligonal $\lambda_j = (\tilde{\gamma}_j)_\Delta$ definită la (3.2.5). $\lambda_j(t_k)$ e prin definiţie egală cu $z_{j,k}$ iar λ_j e un contur. Pentru $t \in [t_{k-1}, t_k]$ şi $j = 0$ sau $j = n$, avem $|z_{j,k} - \lambda_j(t)| = |\varphi(s_j, t_k) - \varphi(s_j, t)| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ şi pentru $j = 0$

$$|z_{1,k} - \lambda_0(t)| = |\varphi(s_1, t_k) - \varphi(s_0, t)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{deci}$$

$$\lambda_0(t) \in D_{0,k} \cap D_{1,k} \text{ iar } \lambda_n(t) \in D_{n,k}.$$

Dacă $j \in \overline{1, n-1}$ şi $t \in [t_{k-1}, t_k]$ atunci $\lambda_j(t)$ aparţine segmentului ce uneşte $z_{j,k-1}$ de $z_{j,k}$, deci

$$|z_{j,k} - \lambda_j(t)| \leqslant |z_{j,k} - z_{j,k-1}| = |\varphi(s_j, t_k) - \varphi(s_j, t_{k-1})| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ şi } |z_{j+1,k} - \lambda_j(t)| \leqslant |z_{j+1,k} - z_{j,k}| + |z_{j,k} - \lambda_j(t)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ deci şi în acest caz } \lambda_j(t) \in D_{j,k} \cap D_{j+1,k}$$

3) Pentru a demonstra $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_0} f$ e suficient a arăta că pentru orice $j \in \overline{1,n}$ avem $\int_{\lambda_{j-1}} f = \int_{\lambda_j} f$. Fie $j \in \overline{0,n}$, $k \in \overline{0,n-1}$. f va admite pe discul $D_{j,k}$ o primitivă (vezi (3.14.1)) pe care o notăm cu $g_{j,k}$. Cum $D_{j,0} = D_{j,n}$ convenim să alegem $g_{j,0} = g_{j,n}$. Intersecţiiile $D_{j,k-1} \cap D_{j,k}$ sînt convexe, deci conexe, iar funcţia $g_{j,k-1} - g_{j,k}$ avînd derivată nulă pe această intersecţie, va fi constantă: $g_{j,k-1} - g_{j,k} = c_{j,k}$ şi aceasta pentru orice $j \in \overline{0,n}$, $k \in \overline{1,n}$. Pentru a calcula $\int_{\lambda_j} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f \circ \lambda_j)\, d\lambda_j$, ţinem cont că $\lambda_j(t)$ fiind în $D_{j,k}$ cînd $t \in [t_{k-1}, t_k]$, putem folosi formula lui Newton — Leibniz şi obţinem

$$\int_{\lambda_j} f = \sum_{k=1}^{n} [g_{j,k}(\lambda_j(t_k)) - g_{j,k}(\lambda_j(t_{k-1}))]$$

Ţinînd cont de definiţia constantelor $c_{j,k}$ şi de $g_{j,0} = g_{j,n}$, obţinem $\int_{\lambda_j} f = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}$. La acelaşi rezultat ne conduce şi

$\int_{\lambda_{j-1}} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f \circ \lambda_{j-1})\, d\lambda_{j-1}$, deoarece şi $\lambda_{j-1}(t) \in D_{j,k}$ pentru orice $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $j \in \overline{1,n}$. Deci $\int_{\lambda_{j-1}} f = \int_{\lambda_j} f$. □

Din teorema lui Cauchy putem deduce cîteva consecinţe imediate.

Din (3.10) şi (3.15), se obţine o nouă teoremă de legătură între olomorfie şi primitivă:

3.16. **Corolar.** *Pe un domeniu simplu conex orice funcţie olomorfă admite primitivă.* □

A doua consecinţă ne asigură independenţa unor integrale faţă de drumul de integrare.

3.17. **Corolar.** *Dacă* f *e olomorfă mulţimea deschisă* G, *iar* γ_0, γ_1 *sînt două drumuri rectificabile omotope în* G, *atunci*:

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Pentru demonstraţie e suficient să aplicăm lui $\gamma_0 \cup \gamma_1^{-}$ teorema (3.15). □

Corolarul (3.17) ne arată cum putem construi o primitivă pentru o funcție olomorfă f pe un domeniu simplu conex D. Alegem un $z_0 \in D$ fix și un $z \in D$ variabil și le unim cu un drum rectificabil oarecare γ_z. Numărul $g(z) = \int_{\gamma_z} f$ nu depinde de drumul ales și g va fi conform demonstrației de la (3.10), o primitivă a lui f. Se mai notează $\int_{z_0}^{z} f = \int_{\gamma_z} f$

§ 3. FORMULELE LUI CAUCHY

În paragraful de față vom folosi teorema lui Cauchy pentru a adînci studiul funcțiilor olomorfe obținînd cîteva noi rezultate fundamentale. Cea mai importantă e teorema formulelor lui Cauchy, care are un aspect dublu. Pe de o parte, se constată că orice funcție olomorfă e nelimitat derivabilă, pe de altă parte, ne permite să determinăm valorile unei funcții olomorfe într-un disc, cunoscîndu-se pe cele de pe frontieră. Din această teoremă vom deduce un șir de noi proprietăți iar pe urmă o vom extinde la drumuri care nu sînt circulare.

Ca și în cazul integralelor reale, vom întîlni cazuri în care integrala complexă depinde de un parametru. Fie γ un drum rectificabil cu suportul $K = \{\gamma\}$, G o mulțime deschisă din $\mathbf{C}$ iar g o aplicație continuă din $G \times K$ în $\mathbf{C}$. Atunci pentru orice $z \in G$ integrala $\int_{\gamma} g(z, \zeta)\, d\zeta$ are sens.

3.18. **Propoziție.** *Dacă* $g : G \times K \to \mathbf{C}$ *e continuă, atunci* $h : G \to \mathbf{C}$ *definită de* $h(z) = \int_{\gamma} g(z, \zeta)\, d\zeta$ *este continuă, iar dacă* $g'_z(z, \zeta)$ *există și e continuă pe* $G \times K$, *atunci* h *este olomorfă în* G *și* $h'(z) = \int_{\gamma} g'_z(z, \zeta)\, d\zeta$.

Demonstrație. 1) Fie g continuă și $z_0 \in G$. Alegem $r > 0$ astfel încît $\overline{U}(z_0 ; r) \subset G$ și fie $\varepsilon > 0$ dat. g fiind uniform continuă pe $\overline{U}(z_0 ; r) \times K$ va exista un η astfel ca $|z - z_0| < \eta$ să implice $|g(z, \zeta) - g(z_0, \zeta)| < \frac{\varepsilon}{V(\gamma)}$ și atunci $|h(z) - h(z_0)| < \varepsilon_5$.

2) Dacă și $g'_z(z, \zeta)$ e continuă iar $z_0 \in D$, formăm $g_1 : G \times K \to \mathbf{C}$ astfel:

$$g_1(z, \zeta) = \begin{cases} \dfrac{g(z, \zeta) - g(z_0, \zeta)}{z - z_0}, & \text{dacă } (z, \zeta) \in G \setminus \{z_0\}) \times K \\ g'_z(z_0, \zeta), & \text{dacă } (z, \zeta) \in \{z_0\} \times K \end{cases}$$

Se arată ușor că g_1 e continuă pe $G \times K$ și conform etapei 1) a acestei demonstrații $h_1(z) = \int_\gamma g_1(z, \zeta)\, d\zeta$ definește o funcție continuă $h_1 : G \to \mathbb{C}$, deci $h_1(z_0) = \lim_{z \to z_0} h_1(z)$. Dar

$$h_1(z_0) = \int_\gamma g'_z(z_0, \zeta)\, d\zeta, \text{ iar } h_1(z) = \int_\gamma \frac{g(z, \zeta) - g(z_0, \zeta)}{z - z_0}\, d\zeta = \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}.$$

Deci h e derivabilă în z_0 și $h'(z_0) = \int_\gamma g'_z(z_0, \zeta)\, d\zeta$. □

De exemplu, dacă $\varphi : K \to \mathbb{C}$ e o funcție continuă și notăm $g(z, \zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$ atunci pe $G = \mathbb{C} \setminus K$ funcția $h(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ va fi olomorfă și prin inducție se arată că h va fi nelimitat derivabilă și

$$h^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

Acest caz particular este *lema privind integrale de tip Cauchy*. De remarcat că aici φ este definită pe K iar h pe complementul lui K.

3.19. **Teoremă. (Formulele lui Cauchy pentru disc).** *Fie* $f : \overline{U}(z_0; r) \to \mathbb{C}$ *continuă pe* $\overline{U}(z_0; r)$ *și olomorfă pe* $U(z_0; r)$. *Atunci* f *este nelimitat derivabilă pe* $U(z_0; r)$ *și pentru orice* $z \in U(z_0; r)$ *sînt valabile formulele lui Cauchy:*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\delta U(z_0; r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \text{ unde } k \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. 1) Verificăm mai întîi formula lui Cauchy pentru $k = 0$. Avînd $0 \leqslant |z - z_0| < r$, $n \in \mathbb{N}$, alegem $r_n \in \mathbb{R}$ astfel ca să avem $|z - z_0| < r_n < r$. Avem pentru $\gamma_n = \delta U(z_0; r_n)$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} f(z) \cdot \int_{\gamma_n} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Ultima integrală are după formula (3.11.3), valoarea $2\pi i$, iar despre penultima arătăm că e egală cu 0. Elementul $z \in U(z_0; r)$ fiind fixat considerăm

ζ variabil pe $U(z_0\,;r)$ şi construim funcţia:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{dacă } \zeta \in U(z_0\,;r) \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{dacă } \zeta = z \end{cases}$$

care e derivabilă în $U(z_0\,;r) \setminus \{z\}$ şi continuă în domeniul convex, deci stelat $U(z_0\,;r)$. Prin urmare, g admite după teorema (3.13) o primitivă şi atunci

$$\int_{\gamma_n} g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Dar, $g(\gamma_n(t)) = \dfrac{f(\gamma_n(t)) - f(z)}{\gamma_n(t) - z}$ pentru orice $t \in [0,1]$ prin urmare $\displaystyle\int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$ şi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)$$

Alegînd un şir $r_n < r$, ce tinde către r, γ_n va tinde uniform către $\gamma = \delta U(z_0\,;r)$ şi se aplică (3.7.7),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta U(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

2) Din formula precedentă putem deduce, aplicînd lema integralei de tip Cauchy (3.18), pentru $\varphi = f$, că $h(z) = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ e olomorfă, pe $\mathbf{C} \setminus \{\gamma\}$ şi nelimitat derivabilă, iar derivata ei de ordin k este $h^{(k)}(z) = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$. Dar conform punctului 1) al demonstraţiei, pe $U(z_0\,;r) \subset \mathbf{C} \setminus \{\gamma\}$ avem $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\, h(z)$ de unde rezultă formulele lui Cauchy şi derivabilitatea nelimitată a lui f pe $U(z_0\,;r)$. □

Să calculăm $I_k = \displaystyle\int_{\delta U(0:1)} \frac{\sin z}{z^k}\, dz$, $k \in \mathbf{Z}$. E util să transcriem integrala sub forma $I_k = \displaystyle\int_{\delta U(0:1)} \frac{\sin \zeta}{\zeta^k}\, d\zeta$. Pentru $k \leqslant 0$; $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^k}$ e olomorfă în $\mathbf{C}$, deci aplicăm teorema lui Cauchy și $I_k = 0$. Dacă $k > 0$ numitorul se anulează și vom aplica (de la dreapta spre stînga) formulele lui Cauchy alegînd $f(z) = \sin z$, $z = 0$ și avem $I_k = \int\limits_{\delta U(0:1)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - 0)} = (k-1)!2\pi i f^{(k-1)}(0)$.

Dar pentru k impar $f^{(k-1)}(z) = \pm \sin z$ și $I_k = 0$; pentru $k = 4n + 2$, $I_{4n+2} = (4n + 1)!\, 2\pi i$, pentru $k = 4n$, $I_{4n} = -(4n-1)!\, 2\pi i$.

În privința legăturii dintre olomorfie și existența primitivei, am constatat la (3.16), că pe domenii simplu conexe olomorfia implică existența primitivei. Reciproca e valabilă chiar pentru orice domeniu.

3.20. **Teoremă. (Morera).** *Dacă o funcție complexă admite primitivă pe o mulțime deschisă G, atunci ea e olomorfă pe* G.

Într-adevăr, dacă g e o primitivă a lui f și $z_0 \in G$, atunci alegînd $r > 0$ astfel încît să avem $\overline{U}(z_0; r) \subset G$, g va fi olomorfă pe $U = U(z_0; r)$ și continuă pe $\overline{U}$, deci conform teoremei (3.19), g e nelimitat derivabilă pe U, deci în particular există $g''(z_0)$ care însă coincide cu $f'(z_0)$. Deci f e olomorfă pe G.□

O altă importantă problemă a teoriei funcțiilor olomorfe este de a determina diferite categorii de submulțimi ale unei mulțimi deschise G pe care funcția fiind derivabilă să atragă după sine olomorfia ei pe G. În acest scop vom spune despre o mulțime de drepte că *e local finită* pe G, dacă orice punct $z_0 \in G$ admite o vecinătate ce intersectează doar un număr finit de drepte din mulțime. De exemplu, mulțimea dreptelor de ecuație $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$ e local finită în $U(1; 1)$ dar nu e local finită în $U(0; 1)$.

3.21. **Propoziție.** *Dacă G e o mulțime deschisă și d e reunirea unei mulțimi de drepte local finite în G, iar* f *e o funcție complexă continuă pe G și derivabilă pe $G \setminus d$, atunci ea e olomorfă pe G.*

Într-adevăr, pentru orice $z_0 \in G$ putem alege $r > 0$ astfel ca $U(z_0; r)$ să fie inclusă în G și să nu conțină decît un număr finit de drepte, ce trec prin z_0. Teorema (3.13) ne asigură existența unei primitive a lui f pe $U(z_0; r)$ iar de aici rezultă derivabilitatea în z_0 (vezi 3.20).

Vom rezolva acum problema de a „uniformiza'' într-un anumit sens o aplicație multivocă.

Să considerăm spre exemplu aplicația multivocă Log definită în capitolul doi. Să presupunem că z ia valori de la 1 la 2 prin valori reale. Atunci e ușor de văzut că putem alege pentru fiecare z una din valorile lui Log z (de exemplu cea reală) astfel ca aplicația univocă astfel obținută să fie continuă. Dar dacă pornim de la valoarea $2\pi i$ pentru $z = 1$ și adăugăm valorilor reale precedente alese $2\pi i$ obținem o nouă funcție continuă. Acestea vor fi ramuri ale logaritmului complex. Mai general: Fie $D \subset \mathbf{C}$, $A : D \to \mathscr{P}(\mathbf{C})$ o aplicație complexă multivocă, iar G o parte deschisă din D. Vom spune că funcția $f : G \to \mathbf{C}$ e o *ramură uniformă* a lui A, dacă f e olomorfă și pentru orice $z \in G$, avem $f(z) \in A(z)$.

Dacă A e aplicația inversă a unei funcții $g : D_1 \to D$ și $f : G \to \mathbf{C}$ o ramură a lui A, atunci f e injectivă, deci admite ca inversă restricția lui g la $f(G)$.

Demonstrăm existența unor ramuri uniforme și chiar unicitatea lor, dacă se fixează o valoare inițială (asemănător problemei Cauchy la ecuații diferențiale), pentru aplicația multivocă Log. Pentru a ușura însă aplicarea ei, o vom enunța direct pentru o funcție compusă Log ∘ g, și pentru g^α.

3.22. **Teorema ramurilor uniforme.** *Fie D un domeniu simplu conex din* $\mathbf{C}$, g *o funcție olomorfă pe D ce nu ia valoarea* 0 ; z_1 *un punct din D iar* w_1, w_2, $\alpha \in \mathbf{C}$ *numere pentru care* $w_1 \in \mathrm{Log}\, g(z_1)$, $w_2 \in [g(z_1)]^{\alpha}$. *Atunci există exact cîte o funcție* $f_1, f_2 \in \mathscr{H}(D)$ *astfel ca* f_1 *să fie o ramură uniformă pentru aplicația multivocă* $\mathrm{Log} \circ g$ și $f_1(z_1) = w_1$, *iar* f_2 *pentru* g^{α} *și* $f_2(z_1) = w_2$; *în plus* $f_1'(z) = \dfrac{g'(z)}{g(z)}$, $f_2'(z) \in \alpha[g(z)]^{\alpha-1} \cdot g'(z)$.

Demonstrație. 1) Fie $h(z) = \dfrac{g'(z)}{g(z)}$. Cum $g(z) \neq 0$, h este olomorfă pe domeniul D și aplicînd teorema (3.16) va exista o primitivă l a lui h pe D și

$$\left[\frac{e^{l(z)}}{g(z)}\right]' = \frac{[l'(z) \cdot g(z) - g'(z)]\, e^{l(z)}}{g^2(z)} = \frac{[g'(z) - g'(z)] \cdot e^{l(z)}}{g^2(z)} = 0$$

Deci $e^{l(z)} = c \cdot g(z)$. Exponențiala nu ia valoarea 0, deci $c \neq 0$. Să alegem constanta $k \in \mathbf{C}$ astfel încît $f_1 \underset{\text{def}}{=} l + k$ să îndeplinească condiția $f_1(z_1) = w_1$, adică $k = w_1 - l(z_1)$. Atunci $f_1 \in \mathscr{H}(D)$ e ramura uniformă căutată, deoarece

$$e^{f_1(z)} \equiv e^{l(z)} \cdot e^{k} = e^{l(z)} \cdot e^{w_1} \cdot e^{-l(z_1)} = \frac{c \cdot g(z) \cdot g(z_1)}{c \cdot g(z_1)} = g(z) \text{ și}$$

$$f_1(z) \in \mathrm{Log}\ g(z). \text{ Avem } f_1'(z) = l'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Dacă $\tilde{f}_1 \in \mathscr{H}(D)$ ar fi o altă ramură uniformă cu proprietatea $f_1(z_1) = w_1$, atunci $g(z) = e^{\tilde{f}_1(z)} = e^{f_1(z)}$, deci $e^{\tilde{f}_1(z) - f_1(z)} = 1$ și derivînd : $[\tilde{f}_1'(z) - f_1'(z)] \cdot e^{\tilde{f}_1(z) - f_1(z)} \equiv 0$, de unde rezultă $\tilde{f}_1'(z) = f_1'(z)$. Avînd $\tilde{f}_1(z_1) = f_1(z_1)$, deducem $\tilde{f}_1 = f_1$.

2) Fie acum $w_2 \in \mathbf{C}$ un număr pentru care $w_2 \in [g(z_1)]^{\alpha} = e^{\alpha\, \mathrm{Log}\, g(z_1)}$ și alegem $w_1 \in \mathrm{Log}\, g(z_1)$ astfel încît să avem $w_2 = e^{\alpha w_1}$ deci putem construi după 1) o funcție f_1 olomorfă în D astfel încît să avem $w_1 = f_1(z_1)$ și $f_1(z) \in \mathrm{Log}\, g(z)$ pentru orice $z \in D$. Definim $f_2(z) = e^{\alpha f_1(z)} (z \in D)$. Atunci $f_2 \in \mathscr{H}(D)$ și $f_2(z) \in e^{\alpha\, \mathrm{Log}\, g(z)} = [g(z)]^{\alpha}$ pentru orice $z \in D$, $f_2(z_1) = e^{\alpha f_1(z_1)} = e^{\alpha w_1} = w_2$, iar $f_2'(z) = \alpha f_1'(z)\, e^{\alpha f_1(z)} = \alpha \dfrac{g'(z)}{g(z)} e^{\alpha f_1(z)} \in \alpha g'(z) \dfrac{[g(z)]^{\alpha}}{g(z)} = \alpha \cdot g'(z) [g(z)]^{\alpha-1}$. Dacă $\tilde{f}_2 \in \mathscr{H}(D)$, $\tilde{f}_2(z) \in e^{\alpha\, \mathrm{Log}\, g(z)}$ și $\tilde{f}_2(z_1) = w_2$, atunci $h = \tilde{f}_2 : f_2 \in \mathscr{H}(D)$ și $|h(z)| = |e^{\alpha 2k(z) \cdot \pi . i}| = e^{-b2k(z)\pi}$, unde $b = \mathbf{Im}\ \alpha$, $k(z) \in \mathbf{Z}$. Deci $k(z) = -\dfrac{\ln |h(z)|}{2b\pi}$ fiind continuă e constantă, prin urmare h e constant. Cum $h(z_1) = 1$ rezultă că $\tilde{f}_2 = f_2$.

Formulele lui Cauchy date la (3.19) sînt valabile nu numai pentru drumuri circulare, dar pentru generalizarea lor avem nevoie de noțiunea de index al unui drum.

3.23. **Indexul unui drum față de un punct.** Considerăm două contururi : $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t}$ și $\gamma_2(t) = e^{4\pi i t}$. Cînd t parcurge intervalul $[0, 1]$, $\gamma_1(t)$ ocolește pe cerc o dată originea, $\gamma_2(t)$ de două ori. Dacă vom calcula integrala $\int_{\gamma} f$ pentru funcții f ce n-au primitivă deosebirea poate fi importantă. De exemplu, $\int\limits_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta}$ va fi egală cu $2\pi i$ pentru primul contur, iar pentru al doilea cu $4\pi i$.

Dacă încercăm însă să dăm o definiție precisă noțiunii, de cîte ori ocolește conturul γ punctul $z_0 \in \mathbf{C}$, vom constata că nu e ușor a găsi o caracterizare riguroasă pentru acest număr. Ori fără aceasta nu putem calcula $\int\limits_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$ sau mai general $\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta$. Pentru a ocoli această piedecă, vom folosi tocmai prima integrală pentru a defini numărul de rotații. ca pe urmă să o putem folosi la calcularea celei de-a doua integrale.

Fie γ un drum rectificabil din $\mathbf{C}$ (nu neapărat închis) și $z_0 \in \mathbf{C}\setminus\{\gamma\}$. Prin *indexul lui γ față de z_0*, înțelegem numărul

$$n(\gamma, z_0) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

În teorema care urmează vom enumera principalele proprietăți ale indexului. În ea vom folosi următoarea noțiune:

O aplicație f a mulțimii deschise G în $\mathbf{C}$ se spune a fi *local constantă*, dacă e constantă pe fiecare componentă conexă a lui G. E evident că pentru aceasta e necesar și suficient ca f să fie derivabilă pe G și derivata să fie nulă.

3.24. Teorema indexului. *Fie γ un drum rectificabil din* $\mathbf{C}$:

a) *Dacă drumul γ_2 e omotop cu γ_1 în $\mathbf{C}\setminus\{z_0\}$, atunci $n(\gamma_1, z_0) = n(\gamma_2, z_0)$.*

b) *Dacă $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, atunci $n(\gamma, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma_2, z_0)$.*

c) $n(\gamma^-, z_0) = -n(\gamma, z_0)$

Fie acum γ un contur din $\mathbf{C}$

d) *Dacă $z_0 \in \mathbf{C}\setminus\{\gamma\}$, atunci $n(\gamma, z_0)$ e un număr întreg.*

e) *Funcția $j(z) = n(\gamma, z)$ e local constantă pe $\mathbf{C}\setminus\{\gamma\}$.*

f) *Dacă $\gamma = \delta\overline{U}(z_0; r)$ și $z \in U(z_0; r)$, atunci $n(\gamma, z) = 1$.*

g) *$\mathbf{C}\setminus\{\gamma\}$ are exact o componentă nemărginită. Dacă z_0 îi aparține acesteia atunci $n(\gamma, z_0) = 0$.*

h) *Mulțimea $\{z \in \mathbf{C} : n(\gamma, z) \neq 0\}$ e mărginită.*

Demonstrație. a) rezultă din (3.17), b) din (3.7.3) și c) din (3.7.2).

d) Fie γ un contur, adică un drum rectificabil și închis, iar z un element fix din $\mathbf{C}\setminus\{\gamma\}$. Pentru a calcula $\int\limits_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta - z}$ în lipsa unei funcții primitive pe $\mathbf{C}\setminus\{z\}$, vom descompune integrala într-o sumă de integrale pe drumuri cuprinse în domenii simplu conexe ce nu conțin pe z, în care $\frac{1}{\zeta - z}$ ca funcție de ζ admite primitive. Fie $\varepsilon = d(z, \{\gamma\})$. Va exista $\eta > 0$ astfel ca $|t' - t''| < \eta$ să implice $|\gamma(t') - \gamma(t'')| < \varepsilon$ și fie $\Delta = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ o diviziune a lui $[0,1]$ cu $||\Delta|| < \eta$ iar $z_k = \gamma(t_k)$. Atunci $\gamma[t_k, t_{k+1}] \subset U(z_k; \varepsilon)$ și fie $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ descompunerea lui γ după Δ. Vom avea $\{\gamma_k\} \subset U(z_{k-1}; \varepsilon)$ și

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k}\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Aceste integrale le vom calcula din aproape în aproape. Alegem $z_0 = \gamma(0)$ şi un $w_0 \in \operatorname{Log}(z_0 - z)$. Aplicînd teorema ramurei uniforme pentru $g(\zeta) = \zeta - z$, există $f_0 \in \mathscr{H}(U(z_0\,;\,\varepsilon))$ astfel ca $f_0'(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta - z}$, $f_0(\zeta) \in \operatorname{Log}(\zeta - z)$ şi $f_0(z_0) = w_0$. Alegem ramura uniformă $f_1 \in \mathscr{H}(U(z_1\,;\,\varepsilon))$ a lui $\operatorname{Log}(\zeta - z)$ astfel ca să avem $f_1(z_1) = f_0(z_1)$ şi aşa mai departe. Atunci,

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\left[f_k(z_{k+1}) - f_k(z_k)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[f_n(z_n) - f_0(z_0)\right] = \frac{1}{2\pi i}\left[f_n(z_0) - f_0(z_0)\right]$$

Dar $f_n(\zeta)$ şi $f_0(\zeta)$ sînt ramuri uniforme ale lui $\operatorname{Log}(\zeta - z)$ deci $f_n(z_0)$ şi $f_0(z_0) \in \operatorname{Log}(z_0 - z)$, prin urmare $f_n(z_0) - f_0(z_0) = 2k\pi i$ unde $k \in \mathbf{Z}$. Atunci $n(\gamma, z) = k \in \mathbf{Z}$

e) Fie $j(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ şi $z \in \mathbf{C} \setminus \{\gamma\}$. j e derivabilă — lema (3.18) pentru $\varphi(\zeta) = 1$ — şi $j'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}$.

Dar $g(\zeta) = \dfrac{1}{(\zeta - z)^2}$ admite o primitivă in $\zeta \in \mathbf{C} \setminus \{z\}$, deci $j'(z) = 0$ şi j este constantă pe orice componentă a lui $\mathbf{C} \setminus \{\gamma\}$.

f) Dacă $\gamma = \delta U(z_0\,;\,r)$, atunci $n(\gamma, z_0) = 1$ — (vezi (3.11.3)) — deci $n(\gamma, z) = 1$ conform punctului e) pentru orice $z \in U(z_0\,;\,r)$.

g) $\{\gamma\}$ fiind compactă, există $r > 0$ astfel ca $\{\gamma\} \subset U(0\,;\,r)$, deci $\mathbf{C} \setminus \overline{U}(0\,;\,r) \subset \mathbf{C} \setminus \{\gamma\}$ şi există o componentă conexă G_0 a lui $\mathbf{C} \setminus \{\gamma\}$ care include mulţimea conexă $\mathbf{C} \setminus \overline{U}(0\,;\,r)$. Celelalte componente vor fi atunci disjuncte faţă de $\mathbf{C} \setminus \overline{U}(0\,;\,r)$, adică sînt mărginite, fiind incluse în $\overline{U}(0\,;\,r)$.

Pentru a arăta că $j\,|G_0 = 0$, considerăm în G_0 un şir $(z_n : n \in \mathbf{N}^*)$ ce tinde spre ∞. $j(z_n)$ e constant. Dar,

$$0 \leqslant |j(z_n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_n}\right| \leqslant \frac{V(\gamma)}{|z_n| - r} \quad \text{şi} \lim_{n\to\infty}\frac{V(\gamma)}{|z_n| - r} = 0$$

deci pentru $z_0 \in G_0$ arbitrar, $j(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} j(z_n) = 0$. Deci $j\,|G_0 = 0$.

h) rezultă din g) deoarece în componenta nemărginită indexul este 0, iar celelalte componente sînt toate incluse în $\overline{U}(0, r)$. □

Fie de exemplu z_1, z_2, z_3 trei puncte necoliniare din $\mathbf{C}$, $z \in T(z_1, z_2, z_3)$ şi $\gamma = \delta(z_1, z_2, z_3)$ (vezi (3.11.5)). Atunci, $n(\gamma, z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ se calculează descompunînd în trei integrale pe drumuri liniare şi obţinem $n(\gamma, z) = 1$. Un rezultat analog se obţine şi pentru un drum $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ unde γ_k sînt drumuri liniare ce parcurg laturile consecutive ale unui patrulater iar z un punct interior. Dacă z_0 e exterior, atît la triunghi cît şi la patrulater obţinem conform punctului g) $n(\gamma, z_0) = 0$.

3.25. **Teoremă. (Formulele lui Cauchy pentru contururi oarecare.)** *Dacă* f *e o funcţie olomorfă pe mulţimea deschisă* G *atunci ea e nelimitat derivabilă pe* G *şi oricare ar fi conturul* γ, *omotop cu zero în* G *şi* $z \in G \setminus \{\gamma\}$, *vom avea:*

$$n(\gamma, z)\cdot \mathrm{f}^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{\mathrm{f}(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

Într-adevăr, f e nelimitat derivabilă în orice z_0 din G, căci alegînd $r > 0$ astfel încît $\overline{U}(z_0\,; r) \subset G$, putem aplica (3.19). Formula din enunţ se demonstrează exact ca la (3.19), şi anume, mai întîi $k = 0$ pentru care avem:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{\mathrm{f}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{\mathrm{f}(\zeta) - \mathrm{f}(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{\mathrm{f}(z)}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Ultima integrală e egală cu $2\pi \mathrm{i} \cdot n(\gamma, z)$ iar penultima e egală cu zero deoarece e egală cu $\int_{\gamma} \mathrm{g}$, unde

$$\mathrm{g}(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{f}(\zeta) - \mathrm{f}(z)}{\zeta - z} & \text{dacă } \zeta \in \gamma \setminus \{z\} \\[2ex] \mathrm{f}'(z) & \text{dacă } \zeta = z \end{cases}$$

g e evident derivabilă pe $G \setminus \{z\}$ şi continuă în G, deci conform (3.21) ea e olomorfă în G. Din $\mathrm{g} \in \mathscr{H}(G)$ deducem aplicînd teorema lui Cauchy că $\int_{\gamma} \mathrm{g} = 0$. Am demonstrat formula lui Cauchy pentru conturul γ şi $k = 0$.

Cazul general rezultă de aici folosind lema (3.18). □ Vom deduce acum cîteva importante consecinţe teoretice ale formulelor lui Cauchy.

3.26. **Propoziţie.** *Dacă* $\mathrm{f} = \mathrm{u} + \mathrm{i}\mathrm{v}$ *e o funcţie olomorfă pe mulţimea deschisă* G, *atunci* u *şi* v *au derivate parţiale continue de orice ordin şi sînt funcţii armonice.*

Avînd $\mathrm{f}' = \mathrm{u}'_x + \mathrm{i}\mathrm{v}'_x = \mathrm{v}'_y - \mathrm{i}\mathrm{u}'_y$ şi f' derivabilă, rezultă că u'_x, v'_x sînt continue în G şi aplicînd teorema lui Cauchy-Riemann lui f' vor exista derivatele parţiale de ordin doi şi aşa mai departe. Din $\mathrm{u}'_x = \mathrm{v}'_y$ obţinem, derivînd după x că $\mathrm{u}''_{xx} = \mathrm{v}''_{yx}$ iar din $\mathrm{u}'_y = -\mathrm{v}'_x$, derivînd după y obţinem $\mathrm{u}''_{yy} = -\mathrm{v}''_{xy}$. Aplicînd teorema lui Schwarz avem $\mathrm{u}''_{xx} + \mathrm{u}''_{yy} = 0$ şi analog $\mathrm{v}''_{xx} + \mathrm{v}''_{yy} = 0$. O funcţie $\mathrm{u} : G \to \mathbf{R}$ care are derivate parţiale de ordinul doi continue şi verifică această ecuaţie se numeşte *funcţie armonică*. □

3.27. *Observații.* 1) Dacă $f = u + iv$ e olomorfă, atunci u și v nu numai că sînt funcții armonice de două variabile, dar sînt legate între ele de condițiile lui Cauchy-Riemann. Două astfel de funcții armonice se numesc *conjugate.*

Dacă invers, se dau două funcții u, v de două variabile, diferențiabile pe mulțimea deschisă G, care verifică condițiile Cauchy-Riemann, atunci $u + iv$ va fi olomorfă pe G, deci u și v vor admite derivate parțiale de orice ordin și vor fi armonice.

2) Dacă se dă numai o singură funcție $u : D \to \mathbf{R}$ pe domeniul *simplu conex* D și căutăm condițiile în care există o altă funcție v astfel ca $u + iv$, să fie olomorfă pe D, atunci evident, e necesar ca u să fie armonică. Să arătăm că aceasta e și suficient.

Într-adevăr, considerînd funcția $\tilde{f} = \tilde{u} + i\tilde{v}$, unde $\tilde{u} = u'_x$, $\tilde{v} = -u'_y$ $\tilde{f}$ va fi definită pe D iar $\tilde{u}$ și $\tilde{v}$ au derivate parțiale continue, de ordinul întîi și $\tilde{u}'_x = u''_{xx} = -u''_{yy} = \tilde{v}'_y$ și $\tilde{u}'_y = u''_{xy} = u''_{yx} = -v'_x$. Prin urmare teorema lui Cauchy-Riemann ne asigură că $\tilde{f}$ e olomorfă în D, iar din (3.16) rezultă că $\tilde{f}$ admite o primitivă în D : fie $f = u + iv$ o primitivă a lui $\tilde{f}$. Atunci $\bar{u}'_x = \bar{v}'_y$ și $\bar{u}'_y = -\bar{v}'_x$. Cum însă $\bar{f}' = \bar{u}'_x + i\bar{v}'_x = \tilde{f} = u'_x - iu'_y$, rezultă că $\bar{u}'_x = u'_x$ și $\bar{u}'_y = u'_y$, adică, $\bar{u} = u + c$, deci $f = u + i\bar{v} = \bar{f} - c$, e o funcție olomorfă pe D. $\bar{v}$ e o funcție armonică conjugată funcției date u.

3) Fiind dată funcția armonică u în D simplu conex, există o funcție olomorfă $f = u + iv$ pe D. Pentru a determina pe v procedăm așa :

$$dv = v'_x\,dx + v'_y\,dy = -u'_y\,dx + u'_x\,dy$$

și expresia din dreapta e o diferențială totală în D, și putem integra pe un drum oarecare din D. De exemplu dacă $D = \mathbf{C}$ pornim de la (x_0, y_0) și pe verticală mergem pînă la (x_0, y), apoi pe orizontală pînă la (x, y) :

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = -\int_{x_0}^{x} u'_y(x_0, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} u'_x(x, y)\,dy$$

de unde $v(x, y)$ e egală cu expresia din partea dreaptă plus o constantă.

De exemplu, dacă $u = \ln\,(x^2 + y^2)$, aceasta e o funcție armonică în $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ care însă deși e domeniu, nu e simplu conex. (Se poate arăta că nu există nici o funcție olomorfă $f = u + iv$ pe $\mathbf{C}\setminus\{0\}$). Alegînd $D = \{x + iy \in \mathbf{C} : x > 0\}$ un domeniu simplu conex în care u e armonică vom avea :

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y_0}{x_0}$$

deci $v(x, y) = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} + C$. Într-adevăr, $f(x + iy) = \ln\,(x^2 + y^2) + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} + C$ e o funcție olomorfă pe D și anume e o ramură uniformă a aplicației multivoce 2 Log.

4) Fie f olomorfă în G, $z_0 \in G$ și $f'(z_0) \neq 0$. Atunci din (2.39)

$$0 \neq |f'(z_0)|^2 = u'^2_x + v'^2_x = u'_x v'_y - u'_y v'_x = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

Iacobianul transformării fiind nenul și derivatele parțiale continue, din teoria transformărilor regulate rezultă — (vezi [21] pag. 648) — că există o vecinătate V a lui z_0 și una U a lui $f(z_0) = w_0$ între care f stabilește un omeomorfism. Fie $f^{-1} : U \to V$ aplicația inversă. f^{-1} e derivabilă în w_0, deoarece fiind bicontinuă $z \to z_0$ e echivalent cu $w \to w_0$ și $z \neq z_0$ implică $w \neq w_0$, deci

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{w - w_0} = \frac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}. \text{ Deci } (f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Din această proprietate se poate deduce de exemplu existența unei inverse univoce pentru funcția $w = e^z$ în vecinătatea fiecărui z_0, dacă se dă perechea z_0, w_0 astfel ca $w_0 = e^{z_0}$, deoarece $(e^z)' = e^z$ nu se anulează. La (3.22), noi am arătat însă mai mult: existența inversei (adică a unei ramuri uniforme a lui Log) pe un domeniu dat.

3.28. **Propoziție. (Inegalitățile lui Cauchy.)** *Dacă f e olomorfă pe* $G \supset \supset \overline{U}(z_0; r)$ *și* $M = \sup \{|f(z)| : z \in \overline{U}(z_0; r)\}$, *atunci pentru orice* $n \in N$ *avem:*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant n!\frac{M}{r^n}\cdot$$

Avem doar să majorăm formulele lui Cauchy

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int\limits_{\delta U(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2r\pi = n!\frac{M}{r^n}. \square$$

O consecință imediată a acestei inegalități este

3.29. **Teorema lui Liouville.** *Dacă o funcție* f *e întreagă (deci olomorfă pe* **C**) *și mărginită, atunci e identic egală cu o constantă.*

Într-adevăr, $|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{r}$ va fi adevărată pentru orice $z_0 \in \mathbf{C}$ și $r \in \mathbf{R}^+$ — unde $M = \sup \{|f(z)| : z \in \mathbf{C}\}$ — deci dînd lui r valori tinzînd către $+\infty$ obținem $|f'(z_0)| = 0$, adică $f' = 0$. Dar atunci $f = c$. $\square$

3.30. *Observații.* 1) Teorema lui Liouville este caracteristică funcțiilor complexe. Există funcții reale nelimitat derivabile, mărginite, care nu sînt constante, ca de exemplu, $f(x) = \sin x$.

2) Rezultatele obținute în studiul funcțiilor complexe pot fi aplicate și în alte capitole ale matematicii. Vom da aici o primă și foarte simplă demonstrație a teoremei fundamentale a algebrei.

La algebră, se demonstrează, că orice polinom cu coeficienți complecși de grad $n \geqslant 1$ are cel mult n rădăcini. Teorema fundamentală afirmă că există cel puțin o rădăcină. De aici, cu ajutorul teoremei lui Bézout se deduce ușor că polinomul are exact n rădăcini. Teorema, deși curent folosită în algebră, nu admite o demonstrație simplă, care să folosească metode algebrice.

3.31. **Teorema fundamentală a algebrei.** *Orice polinom* $P(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$, cu $a_k \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$ și $n \geqslant 1$, *are cel puțin o rădăcină în* **C**.

Demonstraţie. 1) Să presupunem prin absurd că ar exista un polinom de grad $n \geqslant 1$ ce nu are nici o rădăcină. Atunci

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

este intreagă şi $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Prin urmare există $r > 0$ astfel ca $z > r$ să implice $|f(z)| \leqslant 1$. Dar $M = \sup\{|f(z)| : z \leqslant r\}$ e finită, deoarece $f(\overline{U}(0\,;r))$ e compactă. Avem $|f(z)| \leqslant M + 1$ pentru orice $z \in \mathbf{C}$. Aplicînd teorema lui Liouville, $f(z) \equiv C$ pentru orice $z \in \mathbf{C}$, adică $P(z) = \dfrac{1}{C}$ şi P ar fi de grad 0 contrar ipotezei. □

§ 4. FORMULELE LUI SCHWARZ ŞI POISSON

Să considerăm o funcţie olomorfă pe $U(z_0\,;r)$ şi continuă pe $\overline{U}(z_0\,;r)$. Formula lui Cauchy (pentru $k = 0$) ne permite să deducem valorile lui f în orice $z \in U(z_0\,;r)$ cu ajutorul valorilor $f(\zeta)$ luate pe frontiera discului ($\zeta \in \partial U\ (z_0\,;r)$). Formula lui Poisson ne va arăta că un rezultat similar e valabil pentru orice funcţie armonică. Atunci însă — ţinînd cont că partea reală a unei funcţii olomorfe e o funcţie armonică u şi aceasta determină funcţia f, conform cu (3.27.2) făcînd abstracţie de o constantă imaginară — funcţia f se poate determina în $U(z_0\,;r)$ dacă cunoaştem valorile părţii reale pe $\partial U(z_0\,;r)$. Această legătură este dată de formula lui Schwarz. Pentru simplificare vom alege $z_0 = 0$.

3.32. **Propoziţie (Formula lui Poisson).** *Fie* u *o funcţie armonică pe mulţimea deschisă G care include $\overline{U}(0\,;R)$, iar* $z = re^{i\theta} \in U(0\,;R)$. *Atunci,*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\theta) + r^2}\,dt$$

Demonstraţie. Există un $\varepsilon > 0$ astfel încît $D = U(0\,;R + \varepsilon) \subset G$. D fiind un domeniu simplu conex, există o funcţie f olomorfă pe D a cărei parte reală să fie u şi pentru aceasta avem notînd $\gamma = \partial U(0\,;R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\gamma(\tau))}{\gamma(\tau) - z}\,\gamma'(\tau)\,d\tau$$

Cum $\gamma(\tau) = Re^{2\pi i\tau}$, $\gamma'(\tau) = 2\pi i Re^{2\pi i\tau}$, folosind substituţia $2\pi\tau = t$, obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})\cdot Re^{it}}{Re^{it} - re^{i\theta}}\,dt \tag{3.33}$$

Considerăm acum punctul $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r}\, e^{i\theta}$ (numit inversul lui z față de cercul $\partial U(0\,;R)$) și avînd $|z^*| > R$ funcția $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}$ e olomorfă în $U(0\,;R)$, deci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\, d\zeta = 0 \text{ adică}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})\, re^{it}}{re^{it} - Re^{i\theta}}\, dt$$ pe care scăzînd-o din (3.33) obținem,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\, e^{it}\left[\frac{R}{Re^{it} - re^{i\theta}} - \frac{r}{re^{it} - Re^{i\theta}}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t - \theta) + r^2}\, dt$$

deoarece $\frac{e^{2i\theta} + e^{2it}}{e^{i(\theta + t)}} = e^{i(t-\theta)} + e^{-i(t-\theta)} = 2\cos(t - \theta)$.

Fracția din ultima integrală fiind reală, egalînd părțile reale între ele obținem formula din enunț. □

În particular pentru $r = 0$, obținem

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\, dt = \int_0^1 u(Re^{2\pi i\tau})\, d\tau \tag{3.34}$$

care exprimă că valoarea funcției armonice în centrul cercului e medie aritmetică a valorilor luate pe cerc.

3.35. **Propoziție (Formula lui Schwarz).** *Dacă* f *e olomorfă pe mulțimea deschisă* G *care include pe* $\overline{U}(0\,;R)$, $f = u + iv$, $z \in \overline{U}(0\,;R)$ *iar* $\gamma = \delta U(0\,;R)$, *atunci*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\zeta)\, \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, \frac{d\zeta}{\zeta} + iv(0)$$

Demonstrație. Căutăm întîi o formulă care să determine pe v în funcție de valorile luate de u pe $\{\gamma\}$. În acest scop adunăm formulele pe care le-am scăzut în demonstrația precedentă.

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\, e^{it}\left[\frac{R}{Re^{it} - re^{i\theta}} + \frac{r}{re^{it} - Re^{i\theta}}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\left[1 + i\, \frac{2Rr\sin(\theta - t)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2}\right] dt$$

și egalăm părțile imaginare:

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{it})\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\,\frac{2Rr\sin(\theta - t)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2}\,dt$$

Dar prima integrală este, conform cu (3.34), egală cu v (0), deoarece și v e o funcție armonică. Deci ținînd cont și de formula lui Poisson obținem

$$f(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) =$$

$$= iv(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\cdot\frac{R^2 + 2ir\,R\sin(\theta - t) - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2}\,dt =$$

$$= iv(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\,\frac{R^2 - r^2 + Rr[e^{i(\theta-t)} - e^{-i(\theta-t)}]}{R^2 + r^2 - Rr[e^{i(\theta-t)} + e^{-i(\theta-t)}]}\,dt =$$

$$= iv(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\,\frac{Re^{it} + re^{i\theta}}{Re^{it} - re^{i\theta}}\,dt. \text{ Dar } z = re^{i\theta}$$

deci revenind la variabila $\tau = \frac{t}{2\pi}$ obținem

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 u(Re^{2\pi i\tau})\,\frac{Re^{i2\pi\tau} + z}{Re^{i2\pi\tau} - z}\,2\pi i\,d\tau$$

și ținînd cont că $\gamma(\tau) = Re^{2\pi i\tau}$ deci $\frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)} = 2\pi i$, rezultă că

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 u(\gamma(\tau))\,\frac{\gamma(\tau) + z}{\gamma(\tau) - z}\,\frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)}\,d\tau$$

și atunci,

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\zeta)\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}. \ \square$$

3.36. *Observații*. 1) Formula lui Poisson are o mare importanță în rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul doi, de exemplu, în găsirea soluției la problema lui Dirichlet de a găsi o funcție armonică u pe $U(0\,;R)$ care pe frontiera $\partial U(0\,;R)$ ia valori date.

2) În mod analog, se poate folosi formula lui Schwarz la a găsi o funcție olomorfă f în $U(0\,;R)$ cunoscînd valorile părții ei reale pe frontiera discului.

3.37. **Valoarea principală în sens Cauchy.** Revenim pe scurt asupra lemei integralei de tip Cauchy (3.18). Fie γ un drum rectificabil și $\varphi : \{\gamma\} \to \mathbf{C}$ o funcție continuă. Atunci $h(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ definește o funcție olomorfă pe $\mathbf{C} \setminus \{\gamma\}$. Dacă însă $z_0 \in \{\gamma\}$ atunci nici măcar $\lim\limits_{z \to z_0} h(z)$ nu există în general. Dar se poate defini o altă limită care există pentru unele funcții. În acest sens presupunem că există un $\varepsilon_0 > 0$ suficient de mic pentru ca $\partial U(z_0 ; \varepsilon)$ să intersecteze $\{\gamma\}$ în două puncte pentru orice $\varepsilon \in \mathbf{R}$ pentru care $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Dacă $z_0 = \gamma(t_0)$, — evident $t_0 \in]0,1[$ —, notăm cu $t_1 = t_1(\varepsilon)$ acea valoare $t_1 < t_0$ pentru care $\gamma(t_1) \in \partial U(z_0 ; \varepsilon)$ și cu $t_2 = t_2(\varepsilon)$ valoarea $t_2 > t_0$ pentru care $\gamma(t_2) \in \partial U(z_0, \varepsilon))$. Dacă există

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t_1(\varepsilon)} \frac{\varphi(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} d\gamma + \int_{t_2(\varepsilon)}^1 \frac{\varphi(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} d\gamma$$

atunci aceasta se numește valoarea principală în sens Cauchy a integralei și se notează cu

$$\textbf{v.p.} \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

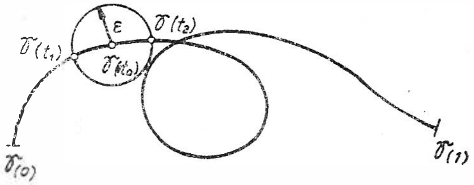


Fig. 3.37

În cazul cînd γ e un drum liniar pe axa reală și φ ia pe $\{\gamma\}$ valori reale, obținem o integrală reală improprie. De exemplu, să calculăm $\textbf{v.p.} \int_{-2}^{+3} \frac{dx}{x}$.

Calculăm : $\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{3} \frac{dx}{x} = \ln|-\varepsilon| - \ln|-2| + \ln 3 - \ln \varepsilon = \ln \frac{3}{2}$, deci,

$$\textbf{v.p.} \int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = \ln \frac{3}{2}$$

3.38. Vom da aici o ultimă aplicație a teoremei lui Cauchy — (vezi (3.15)) — de care ne vom folosi în capitolul următor.

Fie f *o funcție olomorfă în coroana circulară* $U = \{z \in \mathbf{C} : r' < |z - z_0| < r''\}$ și $\gamma_1(t) = z_0 + r_1 e^{2\pi i t}$, $\gamma_2(t) = z_0 + r_2 e^{2\pi i t}$ *două cercuri concentrice din* U, *(adică* $r' < r_1 < r_2 < r''$*). Atunci* $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

De fapt, γ_1 și γ_2 nu sînt omotope în U dar drumul $\tilde{\gamma}_1 = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma^-$ unde $\gamma(t) = z_0 + r_2 + t(r_1 - r_2)$ va fi omotop cu γ_2 în U, deci

$$\int_{\gamma_2} f = \int_{\tilde{\gamma}_1} f = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f. \ \square$$

§ 5. INTEGRAREA FORMELOR DIFERENȚIALE DE GRADUL ÎNTÎI

Am definit în § 1 integrala complexă. Am constatat că dacă $f = u + iv$ e continuă și $\gamma = x + iy$ rectificabilă, atunci $\int_\gamma f dz$ este egală cu $\int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma u dy + v dx = \int_\gamma p dx + q dy$, unde $p = f$, $q = if$.

Pornind de la această expresie, prezentăm în acest paragraf o nouă metodă pentru construirea integralei funcțiilor complexe.

Rezultatele prezentate sînt referitoare la integrala complexă, teorema lui Cauchy și formula integrală a lui Cauchy. Pe lîngă versiunea omotopică a teoremei lui Cauchy, la sfîrșitul capitolului este expusă o demonstrație, datorată lui Dixon (1971), a versiunii globale a teoremei lui Cauchy.

3.39. **Definiție.** O formă diferențială de gradul întîi pe G este o expresie de forma $\omega = p dx + q dy$, unde coeficienții p și q sînt funcții (cu valori reale sau complexe) continue pe G.

3.40. Dacă γ este un drum de clasă $C^1(\gamma \in C^1([0,1]))$ și ω este o formă diferențială de gradul întîi în G, prin definiție, $\int_\gamma \omega$ este dată de formula

3.41.
$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega),$$

unde $\gamma^*(\omega)$ este forma diferențială $f(t)dt$ cu

$$f(t) = p(\alpha(t), \beta(t))\, \alpha'(t) + q(\alpha(t), \beta(t))\, \beta'(t)$$

unde $\alpha(t) = \mathbf{Re}\,\gamma(t)$, $\beta(t) = \mathbf{Im}\,\gamma(t)$ și membrul doi al formulei (3.41) este integrala (în sens Cauchy-Riemann) a unei funcții continue pe intervalul compact $[0,1]$.

Definiția integralei dată cu formula (3.41) cu γ de clasă C^1, antrenează proprietățile :

1) $\int_\gamma \alpha(\omega) = \alpha \int_\gamma \omega$, unde $\alpha \in \mathbf{C}$,

2) $\int_{\gamma^-} \omega = - \int_\gamma \omega$,

3) $\int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \omega$ dacă $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ este o descompunere a drumului γ.

3.42. **Definiție.** Se spune că drumul γ în G este de clasă C^1 pe porțiuni dacă există o descompunere $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ a drumului γ cu proprietate că orice $\gamma_k(k \in \overline{1, n})$ este de clasă C^1. În acest caz vom defini *integrala de-a lungul lui* γ prin formula

$$3.43 \qquad \int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \omega,$$

unde membrul doi are sens.

Evident această definiție a integralei coincide cu cea precedentă dată prin formula (3.41) cînd γ este un drum de clasă C^1 în baza formulei (3.41.3).

3.44. **Propoziție.** *Definiția dată prin formula (3.43) nu depinde de alegerea descompunerii* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ *a drumului* γ. Dacă $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ este un sistem de drumuri asociat diviziunii $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ a intervalului $[0,1]$ (2.15) și $(\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_p')$ un alt sistem de drumuri asociat diviziunii $\Delta' = (t_0', t_1', \ldots, t_p')$ a aceluiași interval $[0,1]$ astfel încît γ_l' să fie de clasă $C^1(l \in \overline{1, p})$. Fie Δ'' diviziunea intervalului $[0,1]$ obținută din toate punctele diviziunilor Δ și Δ'. Noua descompunere $(\gamma_1'', \ldots, \gamma_q'')$ a drumului γ asociată diviziunii Δ'' este de același tip cu descompunerile $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ și $(\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_p')$, adică orice γ_k'' este de clasă C^1. Este evident că, în suma $\sum_{k=1}^{q} \int_{\gamma_k''} \omega$ regrupînd termenii în două moduri convenabile vom obține că $\int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \omega = \sum_{k=1}^{p} \int_{\gamma_k'} \omega$, ceea ce justifică definiția dată. □

Fie $g \in C^1(D)$ (continuu diferențiabilă de ordinul întîi, adică g are derivate parțiale de ordinul întîi continue pe D) și $\omega = dg$, atunci avem :

3.45. **Propoziție.** Dacă γ este un drum de clasă C^1 pe porțiuni atunc $\int_\gamma dg = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0))$.

Demonstrație. Este suficient de a demonstra propoziția cînd γ este de clasă C^1 căci cazul general prin divizarea segmentului $[0,1]$ se reduce la acest caz particular. Avem prin definiție

$$\int_\gamma dg = \int_0^1 \gamma^*(dg) = \int_0^1 d(\gamma^*(g)) = \int_0^1 d(g \circ \gamma).$$

cum $g \circ \gamma : [0,1] \to D$ rezultă că $h = g \circ \gamma$ este de clasă C^1 și avem $dh = h'(t)\, dt$ și deci

$$\int_\gamma dg = \int_0^1 h'(t)\, dt = h(1) - h(0) = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)) \ \square.$$

Se vede că dacă $\omega = dg$ cu g de clasă C^1, integrala $\int_\gamma \omega$ nu depinde de drum și depinde numai de punctul inițial $\gamma(0)$ și punctul final $\gamma(1)$ al drumului γ, Dacă considerăm în locul segmentului [0,1] segmentul $[a, b]$, egalitatea din propoziţia (3.45) se scrie

$$\int_{\gamma} dg = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

De aici rezultă că dacă dg este identic nulă în D, atunci funcţia g este constantă în D, deoarece integrala din membrul întîi este 0 şi $g(\gamma(a)) = g(\gamma)(b))$ pentru orice $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ din D.

3.46. Definiţie. Fiind dată o formă diferenţială ω într-un domeniu D, dacă există o funcţie $g \in C^1(D)$ astfel încît $dg = \omega$, atunci g se numeşte *primitivă a formei diferenţiale* ω iar ω se numeşte *formă diferenţială exactă în* D.

Observaţii. 1) Dacă $\omega = p dx + q dy$, relaţia $dg = \omega$ este echivalentă cu

$$\frac{\partial g}{\partial x} = p, \ \frac{\partial g}{\partial y} = q.$$

2) Dacă g_1 este o altă primitivă pentru forma diferenţială exactă ω, atunci $g_1 = g + c$, unde c este o constantă arbitrară. Evident $dg = dg_1 = \omega$ implică $d(g_1 - g) = 0$, de unde urmează concluzia.

3) Dacă ω este formă diferenţială exactă în D şi g o primitivă a sa avem

$$\int_{\gamma} \omega = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

pentru orice drum γ de clasă C^1 din D. Dacă γ este un contur de clasă C^1 pe porţiuni, atunci $\int_{\gamma} \omega = 0$.

4) Dacă $\int_{\gamma} \omega = 0$ pentru orice contur γ de clasă C^1 din D, atunci ω admite o primitivă pe D. În adevăr, fie $g(x, y)$ valoarea comună a integralelor $\int_{\gamma} \omega$ pe drumurile cu punctul iniţial (x_0, y_0) şi punctul final (x, y) din D. Atunci pe orice drum cu punct iniţial (x, y) şi punct final $(x + h, y)$ şi deci pe drumul liniar cu aceleaşi extremităţi avem $g(x + h, y) - g(x, y) = \int_{x}^{x+h} p(\xi, y)\, d\xi$ cu $|h| \neq 0$ şi suficient de mic pentru ca $(x+h, y) \in D$, obţinem

$$\frac{g(x + h, y) - g(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} p(\xi, y)\, d\xi.$$

Deoarece p este continuă în D urmează că $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = p(x, y)$. La fel se demonstrează că $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = q(x, y)$. Conform observației 1) observația 4) este demonstrată. □

5) Dacă $D = \mathbf{C}^*$ forma diferențială $\omega = dz/z$ nu este exactă și deci nu are primitivă. Pentru a arăta acest lucru este suficient să arătăm că $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} \neq 0$, unde $\gamma = \delta U(0, 1)$. În adevăr

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t},\ t \in [0,1],\ \gamma'(t) = 2\pi i e^{2\pi i t}\, dt \text{ deci}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^1 = 2\pi i\, dt = 2\pi i \neq 0.$$

6) Se vede că

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx + i dy}{x + iy} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

este o formă diferențială complexă și cum $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$ urmează

$$\int_\gamma \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = 0 \text{ și } \int_\gamma \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi,$$

unde $\gamma = \delta U(0\,;\,1)$.

3.47. **Definiții.** Se spune că o formă diferențială $\omega = p dx + q dy$ definită pe G este *închisă* dacă pentru orice punct $z_0 \in G$ există un disc centrat în z_0, $U(z_0\,;\,r)$, în care ω admite o primitivă, adică ω admite primitivă locală. O formă diferențială $\omega = p dx + q dy$ definită pe G se numește *local exactă* dacă $d\omega = 0$ în G, unde, prin definiție, pentru $p, q \in C^1(G)$,

$$d\omega = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

3.48. **Propoziție.** *O formă diferențială ω este închisă dacă și numai dacă pentru orice $x_0 \in G$ există un disc deschis $U(z_0\,;\,r) \supset G$ astfel încît $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$ pentru orice $\gamma = \delta(z_1, z_2, z_3)$, unde $z_1, z_2, z_3 \in U(z_0\,;\,r)$.*

Rezultă din (3.46).

3.49. **Propoziție.** *Dacă ω este de clasă C^1 în G, atunci ω este închisă dacă și numai dacă este local exactă pe G.*

Dacă ω este închisă, atunci din (3.46.4) rezultă că: faptul că ω are o primitivă locală g este echivalent cu $\dfrac{\partial g}{\partial x} = p$ și $\dfrac{\partial g}{\partial y} = q$ în orice

$(x, y) \in U(z_0; r)$, $z_0 \in G$. Cum p și q sînt cu derivate continue $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, ω închisă este echivalentă cu $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ sau, în sfîrșit, cu $d\omega = 0$. □

3.50. *Primitiva unei forme închise ω de-a lungul drumului* $\gamma : [0,1] \to G$ se numește o funcție $f \in C[0,1]$ astfel încît pentru orice $t_0 \in [0,1]$ există $I_{t_0} = (t_0 - h, t_0 + h)$, $U(\gamma(t_0); r)$ și o primitivă g a lui ω în $U(\gamma(t_0); r)$ astfel încît $(g \circ \gamma)(t) = f(t)$ pentru orice $t \in (t_0 - h, t_0 + h) \cap [0,1]$.

3.51. **Teoremă.** *Dacă ω este o formă diferențială închisă* $\omega = p\,dx + q\,dy$ *în G și γ un drum continuu în G, atunci există o primitivă* f *a formei ω de-a lungul lui γ care este unică pînă la o constantă aditivă.*

Unicitatea primitivei formei închise ω. Fie f_1 și f_2 două primitive. Dacă $t_0 \in [0,1]$ există un disc deschis $U(\gamma(t_0); r)$ în care avem două primitive g_1 și g_2 ale lui ω astfel încît $(g_1 \circ \gamma)(t) = f_1(t)$, $(g_2 \circ \gamma)(t) = f_2(t)$ pentru orice $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$. Cum $g_2 - g_1 = c$ urmează $f_2 - f_1$ continuă și local constantă pe $[0,1]$ deci constantă pe $[0,1]$.

Existența primitivei f *a formei închise* ω de-a lungul lui γ. Prin definiție fiecare punct t_0 este conținut într-un interval deschis (relativ la $[0,1]$) în care există o primitivă. Deoarece $[0, 1]$ este compact el poate fi acoperit de un număr finit de astfel de intervale deschise I_k. Aranjăm aceste intervale pe care le renumerotăm într-o ordine $I_1, I_2, \ldots, I_n$ astfel încît $I_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} I_j\right) \neq 0$. Prin ipoteză, avem o primitivă f_k în I_k. În $I_2 \cap I_1$, $f_2 - f_1$ este constantă după teorema de unicitate demonstrată. Adăugînd la f_2 o constantă putem aranja ca $f_2 = f_1$ pe $I_2 \cap I_1$. Atunci g_2 definită prin

$$g_2(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{dacă } t \in I_1 \\ f_2(t) & \text{dacă } t \in I_2 \end{cases} \quad \text{este o primitivă în } I_1 \cup I_2.$$

În $I_3 \cap (I_1 \cup I_2)$, $f_3 - g_2$ este constantă; adăugînd lui f_3 o constantă putem face ca $f_3 = g_2$ în $I_3 \cap (I_1 \cup I_2)$ și atunci g_3 definită prin

$$g_3(t) = \begin{cases} g_2(t) & \text{dacă } t \in I_1 \cup I_2 \\ f_3(t) & \text{dacă } t \in I_3 \end{cases} \quad \text{este o primitivă pe } I_1 \cup I_2 \cup I_3.$$

Din aproape în aproape vom ajunge că în $I_n \cap (I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{n-1})$ $f_n - g_{n-1}$ este constantă. Atunci adăugînd lui f_n o constantă putem face ca $f_n = g_{n-1}$ în $I_n \cap (I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{n-1})$ și atunci g_n definită prin $g_n(t) =$

$$= \begin{cases} g_{n-1}(t) & \text{dacă } t \in I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{n-1} \\ f_n(t) & \text{dacă } t \in I_n \end{cases} \quad \text{este primitivă pe } [0,1]. \ \square$$

3.52. **Definiția** $\int_\gamma \omega$ *pentru un drum continuu* γ. Dacă γ este un drum de clasă C^1 pe porțiuni, adică există sistemul de drumuri $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ asociat diviziunii $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ atunci s-a definit

$$\int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \omega.$$

Dacă f este o primitivă de-a lungul lui γ, avem după formula (3.46.3.)

$$\int_{\gamma_k} \omega = \mathrm{f}(t_{k+1}) - \mathrm{f}(t_k),$$

de unde prin adunare avem

3.53. $$\int_{\gamma} \omega = \mathrm{f}(1) - \mathrm{f}(0).$$

Această formulă conduce la următoarea :

3.54. **Definiție.** Se numește integrala formei diferențiale închise ω pe drumul continuu γ diferența $\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)$, unde f este o primitivă a formei ω de-a lungul lui γ.

Se vede că integrala $\int_{\gamma} \omega$ nu depinde de alegerea primitivei f de-a lungul drumului γ.

Noua definiție generalizează definițiile din (3.41) și (3.43).

3.55. **Definiție.** Fie $\varphi : S \times T \to G$ o aplicație continuă a unui dreptunghi $[a, b] \times [a', b']$ în mulțimea deschisă G și ω o formă închisă în G. Se numește *primitivă a formei închise* ω *după aplicația* φ o funcție f continuă în dreptunghi și care satisface condiția că oricare ar fi punctul (σ, τ) din dreptunghi există un dreptunghi $D_{(\sigma, \tau)}$ centrat în (σ, τ) și un disc $U(\varphi(\sigma, \tau); r) \subset G$ în care g este o primitivă locală a lui ω astfel ca $\mathrm{g}(\varphi(s, t)) = \mathrm{f}(s, t)$ în orice punct $(s, t) \in D_{(\sigma, \tau)}$.

3.56. **Teoremă.** *Există întotdeauna o primitivă a formei închise* ω *după aplicația* φ *și ea este unică pînă la o constantă aditivă.*

Demonstrație. Analog ca în demonstrația teoremei lui Cauchy considerînd două diviziuni una pentru $S = [a, b]$ cu punctele s_j și alta pentru $T = [a', b']$ cu punctele t_k, urmează

$$\varphi([s_j, s_{j+1})] \times [t_k, t_{k+1}]) \subset U_{jk} \subset G,$$

unde U_{jk} este un disc în care există o primitivă g_{jk} a lui ω (ω fiind închisă).

Să fixăm k. Deoarece $U_{j,k} \cap U_{j+1,k}$ nu este vidă și este conexă se poate adăuga fiecărei g_{jk} o constantă astfel ca g_{jk} și $\mathrm{g}_{j+1,k}$ să coincidă în $U_{j,k} \cap U_{j+1,k}$; se obține o funcție $\mathrm{f}_k(s, t)$ astfel încît pentru orice $j \in 0$, $n-1$ să avem

$$\mathrm{f}_k(s, t) = \mathrm{g}_{jk}(\varphi(s, t)) \text{ dacă } t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Astfel $\mathrm{f}_k(s, t)$ este continuă în dreptunghiul $[a, b] \times [t_k, t_{k+1})$ și este o primitivă a lui ω după $\varphi_k = \varphi$ în dreptunghiul precedent. Fiecare funcție f_k este definită pînă la o constantă aditivă. Alegînd constante aditive astfel ca $\mathrm{f}_k(s, t) = \mathrm{f}_{k+1}(s, t)$ pentru $t = t_{k+1}$, atunci funcția f definită prin

$$\mathrm{f}(s, t) = \mathrm{f}_k(s, t) \text{ cînd } t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \overline{0, m-1},$$

este o funcție continuă care este o primitivă a formei închise ω după aplicația φ. Unicitatea acestei primitive f după aplicația φ pînă la o constantă aditivă se demonstrează ca unicitatea primitivei de-a lungul unui drum γ. □

3.57. **Teoremă.** *Dacă* γ_1 *și* γ_2 *sînt două drumuri din* G *omotope* avem $\int\limits_{\gamma_1}\omega=\int\limits_{\gamma_2}\omega$ *oricare ar fi forma închisă* ω *în* G.

Demonstrație. Fie $\varphi: S\times T\to G$ unde $S=T=[0,1]$ o deformație continuă a drumului γ_1 în γ_2 cu aceleași extremități:

$\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=z_1$ și $\gamma_1(1)=\gamma_2(1)=z_2$. Evident, din definiția unei primitive după φ, avem

$$\int\limits_{\gamma_1}\omega=\mathrm{f}(0,1)-\mathrm{f}(0,0)\ \text{ și }\ \int\limits_{\gamma_2}\omega=\mathrm{f}(1,1)-\mathrm{f}(1,0).$$

f este constantă pe $t=0$ și $t=1$ pentru că $\mathrm{g}(\varphi(s,0))=\mathrm{f}(s,0)$ pentru orice $s\in[0,1]$ și $\mathrm{g}(\varphi(s,1))=\mathrm{f}(s,1)$ pentru orice $s\in[0,1]$. Prin urmare $\mathrm{f}(0,0)=\mathrm{f}(1,0)$, $\mathrm{f}(0,1)=\mathrm{f}(1,1)$. Deci $\int\limits_{\gamma_1}\omega=\int\limits_{\gamma_2}\omega$. ☐

Ultima relație, dacă notăm $\gamma_1\cup\gamma_2^-=\gamma$, drum închis din G, se enunță în forma:

3.58. Dacă γ este un drum închis omotop cu zero în G și ω este o formă diferențială închisă, atunci $\int\limits_{\gamma}\omega=0$.

De asemenea, dacă $\mathrm{f}\in\mathscr{H}(G)$ și γ este un drum în G, rezultă că $\mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}x+i\mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}y$ este formă închisă în G pentru că $\dfrac{\partial\mathrm{f}}{\partial y}=\mathrm{i}\dfrac{\partial\mathrm{f}}{\partial x}$ (relația lui Cauchy-Riemann), adică $\mathrm{d}\omega=0$ și $\omega=\mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}z$ este închisă. Deci

3.59. **Teorema lui Cauchy.** *Dacă* $\mathrm{f}\in\mathscr{H}(G)$ *și* γ *este un drum închis omotop cu zero în* G, *atunci* $\int\limits_{\gamma}\mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}z=0$.

3.60. **Generalizarea teoremei lui Cauchy pentru disc.** *Dacă* $\mathrm{f}\in C^1(\bar{D})$ *atunci*

$$\int\limits_{\gamma}\mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\iint\limits_{D}\frac{\partial\mathrm{f}}{\partial\bar{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ \text{ și }\ \int\limits_{\gamma}\mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}\bar{z}=-2\mathrm{i}\iint\limits_{D}\frac{\partial\mathrm{f}}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde $\bar{D}=\bar{U}(z_0;r)$ și $\gamma=\delta U(z_0;r)$.

Demonstrație. Din definiția derivatei formale $\partial\mathrm{f}/\partial\bar{z}$ avem $\dfrac{\partial\mathrm{f}}{\partial\bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial\mathrm{f}}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial\mathrm{f}}{\partial y}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial\mathrm{u}}{\partial x}-\dfrac{\partial\mathrm{v}}{\partial y}+\mathrm{i}\left(\dfrac{\partial\mathrm{u}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathrm{v}}{\partial x}\right)\right]$ și $\mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{u}\mathrm{d}x-\mathrm{v}\mathrm{d}y+\mathrm{i}(\mathrm{v}\mathrm{d}x+\mathrm{u}\mathrm{d}y)$. Aplicînd formula lui Stokes în plan (Green), scrisă cu ajutorul formelor diferențiale

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\omega\quad\text{avem}$$

$$\int_\gamma u dx - v dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy \text{ și } \int_\gamma v dx + u dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Înmulțind relația a doua cu i și adunînd obținem

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar z} dx\, dy.$$

La fel se demonstrează formula a doua în enunț. □

3.61. *Observație.* Dacă $f \in \mathscr{H}(D)$, atunci prima formulă din (3.60) devine teorema lui Cauchy pentru cerc.

Dacă $\bar f \in \mathscr{H}(\bar D)$, atunci formula a doua din (3.60) afirmă că $\int_\gamma f(z)\, d\bar z = 0$, cînd γ este $\delta U(z_0; r)$.

3.62. **Generalizarea formulei integrale a lui Cauchy pentru disc.** Dacă $z \in \bar D \subset G$, $f \in C^1(G)$ și $D = U(z_0; r)$, $\gamma = \delta \bar U(z_0; r)$, *atunci*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}(\zeta) \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z} \quad \text{și}$$

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\bar\zeta}{\bar\zeta - \bar z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta) \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z},$$

unde $\{\gamma\} = \partial D$. *Aceste formule se numesc formulele integrale ale lui Pompeiu pentru disc.*

Demonstrație. În baza formulelor din (3.60) avem

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2i \iint_{D_r} \frac{\partial f}{\partial \bar z}(\zeta) \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z},$$

unde $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar\zeta = \xi - i\eta$ și $D_r = D \cap \{\zeta \in \mathbb{C};\ |\zeta - z| > r\} \subset D$ și $\gamma_1 = \delta U(z; r)$.

Trecînd la limită pentru $r \to 0$ și aplicînd formula integrală a lui Cauchy în cazul $n(\gamma, z) = 1$, obținem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}(\zeta) \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}.$$

În mod analog se obține formula a doua. □

3.63. *Caz particular.* Dacă $f \in \mathscr{H}(D)$, atunci $\frac{\partial f}{\partial \bar\zeta} = 0$ în D și din prima formulă se obține formula integrală a lui Cauchy.

3.64. *Observație. Formula lui Cauchy implică teorema lui Cauchy.* Fie $z \in G$ și $z \notin \{\gamma\}$, unde γ este un drum închis din G. Să considerăm funcția f definită prin relația $\tilde{f}(w) = (w - z)\, f(w)$. Aplicînd formula lui Cauchy obținem $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\tilde{f}(w)}{w - z}\, dw = \tilde{f}(z)\, n(\gamma, z) = 0.$ □

3.65. Reuniunea formală $\gamma = m_1\gamma_1 \cup \ldots \cup m_n\gamma_n = \bigcup_{k=1}^{n} m_k\gamma_k$, unde γ_k sînt drumuri și m_k numere din **Z**, se numește *lanț*. Dacă fiecare drum γ_k este în G spunem că γ este lanț în G. Spunem că *lanțul este închis* dacă el este o reuniune finită de drumuri închise. Prin definiție

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} m_k \int_{\gamma_k} f.$$

Dacă $\gamma = \bigcup_{1}^{n} m_k\gamma_k$ este lanț închis atunci indexul lui γ cu privire la un punct z_0 care nu este pe lanț se definește ca mai înainte.

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz \cdot$$

Dacă γ_1 și γ_2 sînt două lanțuri închise în G, atunci avem

$$n(\gamma_1 \cup \gamma_2, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma_2, z_0).$$

Spunem că γ_1 este *omolog* cu γ_2 în G și scriem $\gamma_1 \underset{G}{\approx} \gamma_2$ dacă

$$n(\gamma_1, z_0) = n(\gamma_2, z_0) \text{ pentru fiecare } z_0 \notin G.$$

Spunem că γ este *omolog cu* 0 *în G*, și scriem $\gamma \underset{G}{\approx} 0$ dacă $n(\gamma, z_0) = 0$ pentru fiecare $z_0 \notin G$.

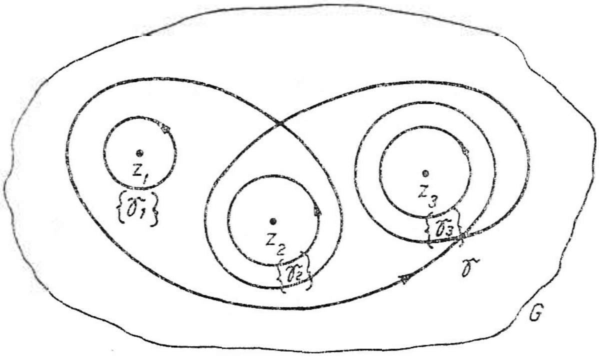


Fig. 3.65

Exemplu. Fie γ curba din figura (3.65) şi $G\setminus\{z_1, z_2, z_3\}$ deschisă din $\mathbb{C}$ atunci $\gamma \underset{G}{\approx} \gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3$ şi $\int\limits_{\gamma} f = \int\limits_{\gamma_1} f + 2\int\limits_{\gamma_2} f + 2\int\limits_{\gamma_3} f$ pentru orice funcţie $f \in \mathscr{H}(G)$.

Dăm acum versiunea globală a teoremei lui Cauchy pentru lanţuri închise, unde drumurile închise sînt din C^1 sau din C^1 pe porţiuni.

3.66. **Teorema lui Cauchy.** *Dacă* γ *este un lanţ închis într-o mulţime deschisă* G, γ *este omolog cu* 0 *în* G *şi* $f \in \mathscr{H}(G)$, *atunci* $\int\limits_{\gamma} f = 0$.

Demonstraţia lui Dixon a teoremei lui Cauchy înlocuieşte consideraţiile topologice cu unele rezultate de analiză. Pentru demonstraţie sînt necesare versiunea omotopică a teoremei lui Cauchy, formula lui Cauchy pentru cerc, teorema lui Liouville, care au fost demonstrate anterior, şi observaţia (3.64).

Demonstraţia este dată în următoarele etape:

1) Fie funcţia g definită pe $G \times G$ prin

$$g(z, w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{dacă } w \neq z, \\ f'(z) & \text{dacă } w = z. \end{cases}$$

2) *g este continuă pe* $G \times G$. Deoarece $f \in \mathscr{H}(G)$, este evident că g este continuă pentru punctele z şi w diferite. Dacă $z = w = z_0$, atunci

$$g(z, w) - g(z_0, z_0) = \frac{1}{w - z}\int\limits_{z}^{w} [f'(\zeta) - f'(z_0)]\, d\zeta$$

pentru (z, w) într-o vecinătate a lui (z_0, z_0). Integrala poate fi luată pe segmentul $[z, w]$. Evaluînd membrul doi, vedem că $1/w-z$ se simplifică cu lungimea segmentului şi expresia de sub semnul integral tinde la 0 prin continuitatea lui f′, cînd $(z, w) \to (z_0, z_0)$. Deci g este continuă.

3) $g(z, w) = g(w, z)$, deci funcţia g este simetrică pe $G \times G$.

4) Definim funcţia h pe $\mathbb{C}$ astfel

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} g(z, w)\, dw & \text{dacă } z \in G, \\ \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \dfrac{f(w)}{w - z}\, dw & \text{dacă } z \notin G. \end{cases}$$

5) *Funcţia* $h \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, *adică este întreagă.* În adevăr pentru a arăta că h este olomorfă pe $\mathbb{C}$ este suficient să arătăm că ea este olomorfă în punctele frontierei ∂G şi în punctele lui $\{\gamma\}$.

a) Fie $z_0 \in \partial G$. Atunci $z_0 \notin \{\gamma\}$ şi fiindcă lanţul γ este închis, există un disc $U(z_0\,;\,\varepsilon)$ astfel încît $U(z_0\,;\,\varepsilon) \cap \{\gamma\} = \Phi$ dar $U(z_0\,;\,\varepsilon) \cap cG \neq \Phi$, adică $U(z_0\,;\,\varepsilon)$ conţine puncte z care nu sînt în G şi deoarece $n(\gamma, z)$ este continuă pentru $z \in \gamma$ urmează $n(\gamma, z_0) = 0$ şi deci că cele două integrale, exprimînd h după cum $z \in G$ sau $z \notin G$, sînt egale cu aceeaşi expresie $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw$ pentru $z \in U(z_0\,;\,\varepsilon)$. Aceasta demonstrează că h este olomorfă în fiecare punct din ∂G.

b) Din uniforma continuitate a lui g pe compacte din $G \times G$ urmează că h este continuă. Pentru a arăta că h este olomorfă, este suficient să demonstrăm că într-un anume disc centrat în z_0, integrala $\int_{\gamma_1} h = 0$, unde $\{\gamma_1\} = \partial T$ şi T este un triunghi oarecare. Dar avem pentru $z \notin \{\gamma\}$ şi $z \in G$

$$\int_{\gamma_1} h(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left[\int_\gamma g(z, w)\, dw\right] dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\int_{\gamma_1} g(w, z)\, dz\right] dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\int_{\gamma_1} g(z, w)\, dz\right] dw,$$

deoarece g este simetrică şi $z \mapsto g(z, w)$ este olomorfă, obţinem valoarea 0. Deci h este olomorfă pe $\mathbf{C}$ ($h \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$).

6) h *este mărginită în* $\mathbf{C}$. Să presupunem că $z \in \operatorname{Ext} \overline{U}(0, R)$ cu R suficient de mare. Atunci $\int_\gamma \frac{f(z)}{w - z}\, dw = f(z)\int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw = 0$. Deci, dacă $z \notin G$, atunci $\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw$ este mărginită pentru că $f(w)$ este mărginită pentru $w \in \{\gamma\}$ şi z este mărginită inferior de către distanţa dintre $\{\gamma\}$ (care este compactă) şi complementul mulţimii deschise G. Dacă $z \in G$ şi z este interior unui disc mare, atunci funcţia $g(z, w)$ este mărginită (fiind continuă). Aceasta demonstrează că h este mărginită pe $\mathbf{C}$.

7) Deoarece $h \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$ şi mărginită pe $\mathbf{C}$, prin teorema lui Liouville h este constantă. Din definiţia lui h prin relaţia $h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw$ dacă $z \notin G$, atunci urmează că $h(z) \to 0$ cînd $z \notin G$ şi $z \to \infty$. Prin urmare $h(z) = 0$ pentru orice $z \in \mathbf{C}$.

8) Acum folosind definiţia lui h pentru $z \in G$ şi faptul că $h = 0$, urmează formula lui Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = f(z)\, n(\gamma, z),$$

şi prin (3.64) aceasta implică teorema lui Cauchy, adică $\int_\gamma f = 0$. □

CAPITOLUL IV

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII OLOMORFE

Rezultatele fundamentale obţinute în capitolul precedent vor fi aplicate în acest capitol la studiul comportării unor şiruri şi serii de funcţii olomorfe, cu scopul dezvăluirii proprietăţilor esenţiale ale noţiunii de funcţie olomorfă. După ce se va arăta că mulţimea $\mathscr{H}(G)$ este închisă în raport cu convergenţa uniformă pe compacte, se vor studia seriile de puteri, care vor permite definirea funcţiilor analitice. Un rezultat central va fi stabilirea echivalenţei între noţiunile de derivabilitate şi analiticitate pentru funcţiile complexe de o variabilă complexă, ceea ce arată că este posibilă construirea teoriei funcţiilor olomorfe pornind de la definirea lor ca funcţii dezvoltabile în serii de puteri.

Tot în acest capitol se vor introduce seriile Laurent, care vor permite studiul comportării unei funcţii olomorfe în jurul unui punct singular izolat. În strînsă legătură cu clasificarea punctelor singulare izolate se va defini noţiunea de funcţie meromorfă.

§ 1. ŞIRURI DE FUNCŢII OLOMORFE

Fie G o mulţime deschisă din $\mathbf{C}$ şi $(f_n) = (f_n\,;\, n \in \mathbf{N})$ un şir de funcţii complexe definite pe G.

4.1. **Definiţie.** Spunem că şirul (f_n) este *uniform convergent pe compacte în G* către f dacă oricare ar fi compactul $K \subset G$, şirul restricţiilor $(f_n | K)$ este uniform convergent către $f | K$.

Noţiunea de convergenţă uniformă pe compacte a şirului (f_n) către f, care este mai tare decît convergenţa simplă (punctuală), dar mai slabă decît convergenţa uniformă în G, înseamnă că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi compactul $K \subset G$, există un număr pozitiv $n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ astfel încît

$$n \geqslant n_0,\ z \in K \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Conform criteriului lui Cauchy, şirul (f_n) converge uniform pe compacte în G dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi compactul

$K \subset G$, există un $n_0(\varepsilon, K) > 0$ astfel încît

$$n, m > n_0,\quad z \in K \Rightarrow |\mathrm{f}_n(z) - \mathrm{f}_m(z)| < \varepsilon.$$

Deoarece, conform propoziției (1.37.2) orice compact K inclus în G poate fi acoperit cu un număr finit de discuri U_k, astfel încît $\overline{U}_k \subset G$, $k \in \overline{1, n}$, rezultă că un șir de funcții converge uniform pe compacte în G dacă și numai dacă el converge uniform pe orice disc compact inclus în G. În cazul cînd D este un disc, convergența uniformă pe compacte în D este asigurată dacă șirul de funcții converge uniform pe orice disc compact inclus în D și concentric cu D. În adevăr, fie $D = U(z_0; R)$ și fie K un compact inclus în D. Deoarece K și ∂D sînt disjuncte, rezultă $d = \mathbf{d}(K, \partial D) > 0$, deci $\overline{U}(z_0; R - d) \subset D$ și $K \subset \overline{U}(z_0; R - d)$.

4.2. **Teoremă.** *Dacă funcțiile* $\mathrm{f}_n : G \to \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, *sînt continue pe mulțimea deschisă* G *și șirul* (f_n) *este uniform convergent pe compacte în* G *către* f, *atunci funcția* f *este continuă pe* G.

Demonstrație. Fie z_0 un punct oarecare din G. Deoarece z_0 este interior, există un $r > 0$ astfel încît $K = \overline{U}(z_0; r) \subset D$. Șirul (f_n) fiind uniform convergent pe K, limita sa f va fi continuă pe K, deci și în punctul z_0. □

Această teoremă ne arată că spațiul $\mathscr{C}(G)$ al funcțiilor continue pe G este închis în raport cu topologia definită de convergența uniformă pe compacte. De această proprietate se bucură și spațiul $\mathscr{H}(G)$. Pentru a arăta acest lucru, avem nevoie de următoarea:

4.3. **Lema lui Weierstrass.** *Dacă* (f_n) *este un șir de funcții olomorfe pe* $D = U(z_0; \mathrm{R})$, *continue pe* $\overline{D}$, *care converge uniform pe cercul* ∂D, *atunci*:

(a) (f_n) *converge uniform pe compacte în* D, *către o funcție* f.

(b) $\mathrm{f} \in \mathscr{H}(D)$.

(c) *Oricare ar fi* $k \in \mathbf{N}$, *șirul* $(\mathrm{f}_n^{(k)})$ *converge uniform pe compacte în* D *către* $\mathrm{f}^{(k)}$.

Demonstrație. 1) Limita șirului (f_n) pe cercul ∂D este o funcție g continuă pe ∂D. Notînd $\gamma = \delta U(z_0; R)$, funcția f definită prin

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{g}(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in D,$$

va fi olomorfă pe D, conform lemei (3.18), și

$$\mathrm{f}^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{g}(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in D.$$

2) Rămîne să arătăm că $(\mathrm{f}_n^{(k)})$ converge uniform pe compacte în D către $\mathrm{f}^{(k)}$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$. Aplicînd lui f_n formulele lui Cauchy, avem

$$\mathrm{f}_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{f}_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in D,$$

deci

$$|\mathrm{f}_n^{(k)}(z) - \mathrm{f}^{(k)}(z)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{\mathrm{f}_n(\zeta) - \mathrm{g}(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, \mathrm{d}\zeta \right|.$$

Este suficient să arătăm că şirul $(f_n^{(k)})$ converge uniform pe discul compact $\overline{U}(z_0 ; r)$ oricare ar fi $r < R$. Fie $d = R - r$ şi ε un număr pozitiv arbitrar. Va exista un n_0 astfel încît

$$n > n_0,\ \zeta \in \partial D \Rightarrow |f_n(\zeta) - g(\zeta)| < \frac{\varepsilon d^{k+1}}{Rk!},$$

de unde deducem

$$n > n_0,\ z \in \overline{U}(z_0, r) \Rightarrow |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \frac{2\pi R \varepsilon d^{k+1}}{d^{k+1} R k!} = \varepsilon,$$

ceea ce arată că $f_n^{(k)}$ converge uniform către $f^{(k)}$ pe $\overline{U}(z_0, r)$, oricare ar fi $r < R$, deci $f_n^{(k)}$ converge uniform pe compacte în D către $f^{(k)}$. □

4.4. **Teorema lui Weierstrass.** *Dacă şirul* (f_n) *de funcţii olomorfe pe mulţimea deschisă* G *converge uniform pe compacte în* G *către funcţia* f, *atunci:*

(a) $f \in \mathscr{H}(G)$.

(b) *Şirul* $(f_n^{(k)})$ *converge uniform pe compacte în* G *către* $f^{(k)}$, *oricare ar fi* $k \in \mathbf{N}$.

Demonstraţie. 1) Fie $z_0 \in D$ ales arbitrar. Vom arăta că f este derivabilă în z_0. Alegînd un $R > 0$ astfel încît $\overline{U}(z_0 ; R) \subset G$, cercul $\partial U(z_0 ; R)$ este un compact inclus în G pe care şirul (f_n) converge uniform. Aplicînd lema (4.3), deducem că f este olomorfă în $U(z_0 ; R)$, deci este derivabilă în z_0. 2) Dacă $\overline{U}(z_0 ; r)$ este un disc compact inclus în G, atunci se poate alege $R > r$ astfel ca $\overline{U}(z_0 ; R) \subset G$ şi aplicînd lema (4.3), deducem că $f_n^{(k)}$ converge uniform pe $\overline{U}(z_0 ; r)$, deci converge uniform pe compacte în G. □

§ 2. SERII DE PUTERI

Printr-o *serie de funcţii complexe* pe mulţimea deschisă $G \subset \mathbf{C}$ înţelegem o sumă formală,

$$\sum f_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots,$$

care se mai scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots,$$

unde, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, $f_n : G_n \to \mathbf{C}$ şi $G_n \supset G$. Sumele parţiale $S_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$ sînt funcţii $S_n : G \to \mathbf{C}$.

Seria $\sum f_n$ este convergentă, uniform convergentă sau uniform convergentă pe compacte în G, după cum şirul (S_n) este convergent, uniform convergent , sau uniform convergent pe compacte în G. Limita $\mathbf{S} : G \to \mathbf{C}$ a şirului (S_n) se numeşte *suma seriei de funcţii* şi vom scrie

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

În acest caz avem, pentru orice $z \in G$, egalitatea

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z).$$

Conform criteriului lui Cauchy, convergența uniformă a seriei de funcții $\sum f_n$ pe o mulțime $E \subset G$ înseamnă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$, astfel încît

$$n > n_0,\ p \in \mathbf{N},\ z \in E \Rightarrow |f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Folosind criteriul comparației pentru seriile cu termeni pozitivi, se obține imediat următorul

4.5. Criteriu de convergență uniformă (Weierstrass). *Dacă există o serie convergentă de numere pozitive $\sum u_n$ și un n_0 astfel încît*

$$n > n_0,\ z \in E \Rightarrow |f_n(z)| \leqslant u_n,$$

atunci seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe E. Ea este și absolut convergentă, adică pentru orice $z \in E$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ este convergentă. □

În cazul cînd funcțiile f_n sînt olomorfe în G, aplicînd teorema (4.4), deducem :

4.6. Teorema lui Weierstrass pentru serii de funcții olomorfe. *Dacă seria $\sum f_n$ de funcții olomorfe în G este uniform convergentă pe compacte în G, atunci suma ei $S = \sum f_n$ este o funcție olomorfă în G, iar seria $\sum f_n^{(k)}$ converge uniform pe compacte în G, și are suma $S^{(k)}$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$.* □

Seriile de puteri (sau tayloriene) sînt un caz particular, dar cel mai important în teoria funcțiilor analitice, de serii de funcții, în care pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $f_n : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ se definește prin $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, unde z_0 și a_n sînt numere complexe date. O serie de puteri se va scrie deci sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$$

Se mai spune că această serie de puteri este dezvoltată în jurul lui z_0, iar numerele a_n se numesc coeficienții seriei de puteri.

Două serii de puteri $\sum a_n(z-z_0)^n$ și $\sum b_n(z-z_1)^n$ se spune că sînt egale dacă $z_0 = z_1$ și $a_n = b_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

4.7. Teorema lui Abel. *Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ este convergentă pentru $z = z_1 \neq z_0$, atunci ea va fi absolut convergentă pentru orice z, care verifică inegalitatea $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.*

Demonstrație. Să notăm $r = |z-z_0|$ și $r_1 = |z_1 - z_0|$. Deoarece seria $\sum a_n(z_1-z_0)^n$ este convergentă, rezultă că există un n_0 astfel încît, pentru orice $n > n_0$, să aibă loc inegalitatea $|a_n| r_1^n < 1$, adică $|a_n| < \frac{1}{r_1^n}$. Să considerăm seria $\sum |a_n| r^n$. Pentru orice $n > n_0$ avem $|a_n| r^n < \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$. Dacă $r<r_1$, seria geometrică $\sum \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$ este convergentă şi aplicînd criteriul comparaţiei, deducem că seria $\sum |a_n| r^n$ este convergentă, deci seria $\sum a_n(z-z_0)^n$ este absolut convergentă, pentru orice z astfel încît $|z-z_0| = r < r_1 = |z_1-z_0|$. □

4.8. Teorema discului de convergenţă (Cauchy-Hadamard). *Fie dată seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *şi să notăm cu* R *numărul definit de formula (lui Cauchy-Hadamard)*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

numit raza de convergenţă a seriei. Atunci:

(a) *În discul* $U(z_0;R)$ *(numit disc de convergenţă) seria converge absolut şi uniform pe compacte.*

(b) *În* $\mathbf{C}\setminus\overline{U}(z_0;R)$ *seria diverge.*

(c) *Suma* S *a seriei este olomorfă în* $U(z_0;R)$.

(d) *Seria derivată* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ *are raza de convergenţă* R *şi suma* S′, *adică*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}, \quad z \in U(z_0;R).$$

Demonstraţie. 1) Să notăm $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (vezi [20]) şi $r = |z-z_0|$. Deoarece $\sqrt[n]{|a_n| r^n} = r\sqrt[n]{|a_n|}$, aplicînd seriei $\sum |a_n| r^n$ criteriul rădăcinii, deducem că această serie converge pentru $rL<1$ şi diverge pentru $rL>1$. Să presupunem că $L \neq 0$ şi $L \neq +\infty$. Pentru $|z-z_0| = r < R = \frac{1}{L}$, adică $rL<1$, seria $\sum a_n(z-z_0)^n$ este absolut convergentă. Pentru $|z-z_0| = r > R$ seria de puteri este divergentă. În adevăr, dacă ar exista un punct z_1, $|z_1-z_0|>R$, astfel ca seria $\sum a_n(z_1-z_0)^n$ să fie convergentă, atunci, conform teoremei (4.7), seria $\sum |a_n| r^n$ ar fi convergentă pentru orice $r<|z_1-z_0|$. Alegînd un r aşa ca $R<r<|z_1-z_0|$, deducem că seria $\sum |a_n| r^n$ ar fi convergentă pentru un $r > \frac{1}{L}$, ceea ce este contradictoriu. Deci seria este absolut convergentă în $U(z_0;R)$ şi este divergentă în $\mathbf{C}\setminus\overline{U}(z_0;R)$. Dacă $L=0$, atunci $rL<1$ pentru orice r, deci seria converge absolut pentru orice $z\in\mathbf{C}$. În acest caz $R=+\infty$, iar discul de convergenţă este întreg planul $\mathbf{C}$. Dacă $L=+\infty$, atunci $rL>1$ pentru orice $r\neq 0$, deci seria diverge pentru orice $z\in\mathbf{C}\setminus\{z_0\}$. Dacă $z=z_0$ este evident că seria converge şi are suma a_0. În acest caz $R=0$, iar discul de convergenţă se reduce la $\{z_0\}$.

2) Să arătăm că seria de puteri converge uniform pe compacte în discul $U(z_0;R)$. Fie $R_1<R$. Pentru orice $z\in\overline{U}(z_0;R_1)$ avem $|a_n(z-z_0)^n| \leqslant$

$\leqslant |a_n| R_1^n$. Deoarece seria $\sum |a_n| R_1^n$ este convergentă, aplicînd criteriul (4.5), rezultă că seria de puteri converge uniform pe discul închis $\overline{U}(z_0;R_1)$, oricare ar fi $R_1 < R$. De aici rezultă că seria de puteri converge uniform pe compacte în $U(z_0;\ R)$.

3) Notînd cu R' raza de convergență a seriei derivate $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^n$, ea coincide cu raza de convergență a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^n = (z - z_0) \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$, deci va fi dată de: (vezi [20])

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|a_n|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R},$$

deci $R' = R$.

4) Faptul că suma seriei derivate este S' rezultă imediat din teorema (4.6). Deducem astfel că o serie de puteri se derivează, derivînd-o termen cu termen, suma seriei derivate fiind egală cu derivata sumei seriei. ☐

4.9. *Observații.* 1) Se arată ușor că dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$, atunci $l = L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (vezi [7], pag. 40), deci în acest caz raza de convergență a seriei de puteri va fi dată de

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a^n|}{|a_{n+1}|}.$$

2) Derivînd termenii seriei de k ori și aplicînd teorema (4.6), deducem

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(z-z_0)^n]^{(k)} \quad \text{și} \quad S^{(k)}(z_0) = k\,!a_k.$$

adică

$$a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k\,!}.$$

3) Discul de convergență $U(z_0;\ R)$ nu coincide în mod obligatoriu cu mulțimea de convergență a seriei de puteri, deoarece teorema (4.8) nu precizează natura seriei pe *cercul* de convergență $\partial U\ (z_0;\ R)$.

4) Dîndu-se două serii de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, definim seria *sumă*, respectiv seria *produs* a acestor două serii, prin seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n$, respectiv $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, unde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots$

$\ldots + a_n b_0$. Dacă R este cea mai mică dintre razele de convergență ale celor două serii, iar S, respectiv T, sînt sumele lor, se verifică ușor că $\mathrm{S}(z) + \mathrm{T}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n$ și $\mathrm{S}(z)\,\mathrm{T}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, pentru orice $z \in U(z_0\,;\, R)$. Dacă $b_0 = c$ și $b_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ atunci $\mathrm{T}(z) = c$ și avem $c\mathrm{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n(z-z_0)^n$.

5) *Seria geometrică* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ are raza de convergență $R = 1$ și deoarece pentru $|z| < 1$, avem

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z + \ldots + z^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z},$$

deducem

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \text{ pentru orice } z \in U(0\,;\,1).$$

4.10. Teorema identității coeficienților. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *două serii de puteri, avînd razele de convergență mai mari ca* $r > 0$ *Sumele lor* S, *respectiv* T, *vor fi definite în* $U(z_0\,;\,r)$. *Dacă există o mulțime* $E \subset U(z_0\,;\,r)$ *astfel încît* $z_0 \in E'$ *și* $\mathrm{S}(z) = \mathrm{T}(z)$, *pentru orice* $z \in E$, *atunci cele două serii sînt egale, adică* $a_n = b_n$ *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$.

Demonstrație. Formînd seria $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z-z_0)^n$, ea are suma S — T, care se anulează pe E. Presupunînd că cele două serii nu sînt egale, există un cel mai mic indice k, pentru care $a_k \neq b_k$. Atunci, pentru orice $z \in U(z_0\,;\,r)$, avem

$$\mathrm{S}(z) - \mathrm{T}(z) = \sum_{n=0} (a_n - b_n)(z - z_0)^n = (z - z_0)^k \Big[a_k - b_k + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k+n} - b_{k+n})(z-z_0)^k\Big] = (z - z_0)^k\, \mathrm{P}(z).$$

Fie (z_m) un șir astfel ca $z_m \in E$, $z_m \neq z_0$ și $\lim_{m\to\infty} z_m = z_0$. Deoarece $\mathrm{S}(z_m) = \mathrm{T}(z_m)$, deducem $\mathrm{P}(z_m) = 0$. Funcția P fiind suma unei serii de puteri în jurul lui z_0 cu rază de convergență strict pozitivă va fi continuă în z_0, deci $\mathrm{P}(z_0) = a_k - b_k = \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}(z_m) = 0$, adică $a_k = b_k$, contrar ipotezei. Rezultă că cele două serii sînt în mod necesar egale. ☐

§ 3. ANALITICITATEA FUNCȚIILOR OLOMORFE

Pentru funcțiile olomorfe pe un disc are loc următoarea teoremă de reprezentare globală prin serii de puteri.

4.11. Teorema dezvoltării în serie Taylor. *Dacă* f *este o funcție olomorfă pe discul* $D=U(z_0;r)$, *atunci există o serie de puteri unică,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *cu raza de convergență* $R\geqslant r$, *astfel încît*

$$\mathrm{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

pentru orice $z\in D$. *Coeficienții seriei (numiți coeficienții Taylor ai funcției* f *în punctul* z_0) *sînt dați de :*

$$a_n=\frac{\mathrm{f}^{(n)}(z_0)}{n\,!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathrm{f}(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

unde $\gamma=\delta U(z_0;\rho)$ *și* $0<\rho<r$.

Demonstrație. Conform formulelor lui Cauchy (3.19), avem, pentru orice $\rho\in\,]0,r[$,

$$\frac{\mathrm{f}^{(n)}(z_0)}{n\,!}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathrm{f}(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

deci integrala nu depinde de ρ. Fie $z\in D$ și alegem ρ astfel încît $r_0=|z-z_0|<\rho<r$. Apelînd din nou la formula lui Cauchy, avem

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathrm{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Dar

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}.$$

Deoarece pentru $\zeta\in\{\gamma\}$ avem $|\mathrm{f}_n(\zeta)|=\left(\dfrac{r_0}{\rho}\right)^n$, unde $\mathrm{f}_n(\zeta)=\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$, iar seria $\sum\left(\dfrac{r_0}{\rho}\right)^n$ este convergentă, aplicînd criteriul (4.5), deducem că seria de funcții continue $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{f}_n(\zeta)$ este uniform convergentă pe $\{\gamma\}$ ca și seria :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{f}(\zeta)\,\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

care, conform cu (4.9.5), are suma $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$. Integrînd termen cu termen, obţinem :

$$\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta,$$

de unde deducem $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, unde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Seria fiind convergentă în $U(z_0\,;r)$ raza ei de convergenţă va fi cel puţin egală cu r. Unicitatea acestei serii rezultă imediat din teorema (4.10).□

Din teoremele (4.8), (4.10) şi (4.11), deducem

4.12. **Teoremă.** *Fie* $D=U(z_0\,;r)$ *şi* A *mulţimea tuturor şirurilor* (a_n) *astfel încît seria* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ *să fie convergentă pentru orice* $z\in D$. *Există o aplicaţie unică, bijectivă şi liniară* $L:\mathscr{H}(D)\to A$, *cu proprietatea că dacă* $f\in\mathscr{H}(D)$ *şi* $L(f)=(a_n)$ *atunci* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ *pentru orice* $z\in D$. *Coeficienţii* a_n *sînt daţi de* $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

4.13. **Definiţie.** Fie G o mulţime deschisă din $\mathbf{C}$ şi fie $f:G\to\mathbf{C}$. Vom spune că funcţia f este *dezvoltabilă în serie tayloriană* în jurul lui $z_0\in G$ dacă există un disc $U(z_0\,;r)\subset G$, $r>0$ şi o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ convergentă în $U(z_0\,;\,r)$, astfel încît $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, pentru $z\in U(z_0\,;r)$. Dacă aceasta are loc pentru orice $z_0\in G$ spunem că f este *analitică* pe G.

4.14. **Teorema analiticităţii funcţiilor olomorfe.** *O funcţie* f *definită pe mulţimea deschisă* G *este olomorfă pe* G *dacă şi numai dacă ea este analitică pe* G.

Demonstraţie. 1) Fie f olomorfă pe G şi z_0 un punct arbitrar din G. Există un $r>0$ astfel încît $U(z_0\,;\,r)\subset G$. Aplicînd teorema (4.11) pentru restricţia lui f la $U(z_0\,;\,r)$, deducem că f este dezvoltabilă în serie tayloriană în jurul lui z_0. Cum z_0 este arbitrar, rezultă că f este analitică pe G.

2) Dacă f este analitică pe G, ea va fi dezvoltabilă în serie tayloriană în jurul oricărui punct $z_0\in G$ şi deci coincide cu suma acestei serii pe un disc centrat în z_0. Conform teoremei discului de convergenţă funcţia f va fi olomorfă în z_0. Cum z_0 este arbitrar, rezultă că f este olomorfă pe G.□

Remarcăm faptul că teorema (4.11) este o teoremă de *reprezentare globală* a unei funcţii olomorfe pe un disc, pe cînd teorema (4.14) este o teoremă de *reprezentare locală* a unei funcţii olomorfe pe o mulţime deschisă oarecare.

4.15. *Exemple.* 1) Din formula seriei geometrice,

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{pentru} \quad z \in U(0\,;1),$$

înlocuind z cu $-z$, se obține:

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad \text{pentru} \quad z \in U(0\,;1).$$

Derivînd aceste serii, se obțin dezvoltările,

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, \qquad \frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} z^{n-1}, \quad z \in U(0\,;1).$$

2) Pentru a obține dezvoltările în serie de puteri ale funcțiilor e^z, $\cos z$, $\sin z$ ne folosim de formulele $(e^z)^{(n)}=e^z$, $(\cos z)^{(4k)}=\cos z$, $(\cos z)^{(4k+1)}=-\sin z$ etc. și avem

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

aceste dezvoltări avînd loc pentru orice $z \in \mathbf{C}$.

Aceste formule pot servi drept definiții ale funcțiilor respective, urmînd atunci să se demonstreze că au loc relațiile (2.54) și (2.61).

3) Dacă $f(z)=\log(1+z)$ este ramura uniformă în $U(0\,;1)$ a lui $\operatorname{Log}(1+z)$, astfel ca $f(0)=1$, se obține dezvoltarea:

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}, \quad z \in U(0\,;1).$$

4) Dacă α este un număr complex și $f(z)=(1+z)^\alpha$ este acea ramură uniformă în $U(0\,;1)$ pentru care $f(0)=1$, se obține dezvoltarea,

$$(1+z)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n, \qquad z \in U\,(0\,;1),$$

numită formula *seriei binomiale.*

5) Fie f o funcție rațională, adică $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, unde presupunem că polinoamele P și Q sînt ireductibile peste $\mathbf{C}$. Fie z_k, $k \in \overline{1, m}$, zerourile polinomului Q. Funcția f va fi olomorfă pe domeniul $D=\mathbf{C}\setminus\{z_1,\ldots,z_m\}$. Dacă $z_0 \in D$, funcția f se dezvoltă în serie tayloriană în jurul lui z_0:

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

Coeficienții a_n se pot determina punînd $z - z_0 = h$, scriind apoi

$$P(z_0 + h) = Q(z_0 + h) \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

și egalînd coeficienții acelorași puteri ale lui h din cei doi membri. Pentru aflarea razei de convergență a seriei de mai sus se poate aplica formula lui Cauchy-Hadamard (teorema 4.8), dar aceasta duce, în general, la calcule complicate. Să observăm însă că această rază este egală cu raza discului maxim centrat în z_0 și conținut în D, adică este egală cu distanța de la z_0 la cel mai apropiat dintre punctele z_k. Deci dacă Q nu este o constantă, adică f nu se reduce la un polinom, raza de convergență a seriei de mai sus este totdeauna un număr finit. În particular, chiar dacă polinoamele P și Q au coeficienți reali, iar Q nu se anulează pe axa reală, seria

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

va avea un interval de convergență finit $]-R, R[$, unde $R = |a|$, a fiind rădăcina cea mai apropiată de origine a polinomului Q. Așa se explică, de exemplu, de ce dezvoltarea

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$$

este valabilă numai în intervalul $]-1, 1[$. În acest caz, ecuația $1 + z^2 = 0$ are rădăcinile i și $-$i și deci raza de convergență a seriei $1 - z^2 + z^4 - \ldots$ este egală cu 1.

6) Echivalența între derivabilitate (olomorfie) și analiticitate nu are loc pentru funcțiile reale de variabilă reală. În acest caz, există chiar funcții nelimitat derivabile pe o mulțime deschisă din **R**, dar care nu sînt analitice, adică nu se pot dezvolta în serie de puteri în jurul oricărui punct al domeniului de definiție. Astfel funcția f : **R** → **R** definită prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

are derivate de orice ordin în fiecare punct din **R** (inclusiv $x = 0$, unde $f^{(n)}(0) = 0$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$), dar nu se poate dezvolta în serie de puteri în jurul originii, pentru că, în caz contrar, suma acestei serii ar fi nulă într-un interval centrat în origine, ceea ce nu este posibil.

Pentru a face mai sugestivă diferența esențială dintre cazul complex și cel real, să notăm cu $\mathscr{C}^k(G)$, $\mathscr{C}^\infty(G)$, $\mathscr{A}(G)$ clasa funcțiilor complexe cu derivate continue pînă la ordinul $k \in \mathbf{N}^*$, nelimitat derivabile, respectiv analitice pe o mulțime deschisă $G \subset \mathbf{C}$ și cu $D(G)$, $C^k(G)$, $C^\infty(G)$, $A(G)$ clasa funcțiilor reale derivabile, cu derivate continue pînă la ordinul $k \in \mathbf{N}^*$, nelimitat derivabile, respectiv analitice pe o mulțime deschisă $G \subset \mathbf{R}$. În cazul complex avem $\mathscr{H}(G) = \mathscr{C}^1(G) = \ldots = \mathscr{C}^\infty(G) = \mathscr{A}(G)$, pe cînd în cazul real au loc incluziunile stricte $D(G) \supset C^1(G) \supset \ldots \supset C^\infty(G) \supset A(G)$.

§ 4. ZEROURILE UNEI FUNCȚII OLOMORFE. TEOREMA IDENTITĂȚII FUNCȚIILOR OLOMORFE

4.16. **Definiție**. Funcția f fiind olomorfă pe mulțimea deschisă $G \subset \mathbf{C}$, un punct $a \in G$ se numește *zero* al lui f dacă $f(a) = 0$. Dacă există un $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ și $f^{(n)}(a) \neq 0$, atunci a se numește un *zero multiplu de ordinul* n al funcției f. Dacă $n = 1$, a se numește un *zero simplu.*

4.17. **Propoziție**. *Dacă a este un zero multiplu de ordinul n al funcției $f \in \mathscr{H}(G)$, atunci există o funcție $g \in \mathscr{H}(G)$ astfel încît $g(a) \neq 0$ și $f(z) = (z - a)^n g(z)$, pentru orice $z \in G$.*

Demonstrație. Vom defini funcția g pe G prin $g(z) = (z-a)^{-n} f(z)$, pentru $z \in G \setminus \{a\}$ și $g(a) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot$ Evident că g este olomorfă pe $G \setminus \{a\}$. Pe de altă parte, există un $r > 0$, astfel încît pentru orice $z \in U(a : r) \subset G$ să aibă loc dezvoltarea

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k = (z - a)^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{n+1}(a)}{(n + 1)!} (z-a) + \ldots \right]\cdot$$

De aici rezultă că $\lim\limits_{z \to a} g(z) = \lim\limits_{z \to a} [(z-a)^{-n} f(z)] = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = g(a)$, ceea ce arată că g este continuă în a, deci pe G. Aplicînd (3.21), rezultă că g este olomorfă pe G.□

Vom nota cu $A = A\ (f) = \{a \in G\,;\ f(a) = 0\}$ mulțimea zerourilor lui $f \in \mathscr{H}(G)$. Dacă $a \in A$, este posibil ca $f^{(n)}(a) = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, adică a să nu aibă un ordin de multiplicitate finit. Vom arăta că, în cazul cînd G este un domeniu, acest lucru se poate întîmpla numai cînd funcția f este identic nulă. Mai precis avem

4.18. **Teoremă.** *Fie D un domeniu din $\mathbf{C}$, $f \in \mathscr{H}(D)$ și A mulțimea zerourilor lui f. Să notăm $\mathbf{B} = \{a \in D\,;\ f^{(n)}(a) = 0,\ n \in \mathbf{N}\}$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente*

(a) $f \equiv 0$

(b) $\mathbf{B} \cap D \neq \emptyset$

(c) $A' \cap D \neq \emptyset$

Demonstrație. 1) Este evident că (a) implică atît (b) cît și (c). 2) Să arătăm că (b) implică (a). Pentru aceasta vom arăta că mulțimea $\mathbf{B}$ este atît închisă cît și deschisă în D. Într-adevăr, dacă $a \in \mathbf{B}$ există $U(a\,;r) \subset D$, $r > 0$, astfel ca pentru orice $z \in U\ (a\,;r)$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Deoarece $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, rezultă că $f(z) = 0$ pentru orice $z \in U(a\,;r)$, deci $U(a\,;r) \subset \mathbf{B}$, ceea ce arată că a esteinterior, de unde deducem că $\mathbf{B}$ este deschisă în D. Pentru a arăta că $\mathbf{B}$ este închisă în D, fie $a \in \mathbf{B}' \cap D$

şi (z_m) un şir de puncte din B, care are limita a. Deoarece derivatele lui f sînt continue în a, rezultă că $\lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{f}^{(n)}(z_m) = \mathrm{f}^{(n)}(a) = 0$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, deci $a \in B$. Deoarece D este mulţime conexă, iar $B \neq \emptyset$, din (1.36) deducem că $D = B$, deci f este identic nulă. 3) Rămîne să mai arătăm că (c) implică (b). Fie $a \in A' \cap D$. Pe baza continuităţii lui f rezultă $\mathrm{f}(a) = 0$. Vom arăta că $a \in B$. Dacă nu ar fi aşa, ar exista un cel mai mic $n \in \mathbf{N}^*$, astfel ca $\mathrm{f}^{(n)}(a) \neq 0$, adică a ar fi un zero de ordinul n al lui f. Din propoziţia (4.17) rezultă că există $\mathrm{g} \in \mathscr{H}(D)$, $\mathrm{g}(a) \neq 0$, astfel ca $\mathrm{f}(z) = (z-a)^n\,\mathrm{g}(z)$, pentru $z \in D$. Deoarece $a \in A'$, există un şir (a_m) de puncte din A, $a_m \neq a$, care are limita a. Deoarece $\mathrm{f}(a_m) = 0$ şi $a_m - a \neq 0$, deducem $\mathrm{g}(a_m) = 0$. Pe baza continuităţii lui g în punctul a, deducem $\mathrm{g}(a) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{g}(a_m) = 0$, ceea ce este contradictoriu. Rezultă că $a \in B$ şi deci $B \cap D \neq \emptyset$. □

Din teorema (4.18) rezultă imediat următoarele proprietăţi importante ale funcţiilor olomorfe pe un domeniu.

4.19. **Teorema zerourilor unei funcţii olomorfe.** *Dacă funcţia* f *olomorfă pe domeniul* D *nu este identic nulă şi* $a \in D$ *este un zero al lui* f, *atunci* : (a) *există un* $r > 0$ *astfel ca* $U(a\,;\, r) \subset D$ *şi* $f(z) \neq 0$, *pentru* $z \in \dot{U}(a\,;\, r)$; (b) *a are un ordin de multiplicitate finit, deci există* $n \in \mathbf{N}^*$ *şi* $g \in \mathscr{H}(D)$, $\mathrm{g}(a) \neq 0$, *astfel încît* $\mathrm{f}(z) = (z-a)^n\,\mathrm{g}(z)$, *pentru* $z \in D$.

În adevăr, dacă afirmaţia (a) nu ar avea loc, atunci punctul a ar fi punct de acumulare de zerouri deci $A' \cap D \neq \emptyset$ şi conform teoremei (4.18) funcţia f ar fi identic nulă. Afirmaţia (b) rezultă imediat din propoziţia (4.17). □

Această teoremă ne spune că zerourile unei funcţii olomorfe neidentic nule pe un domeniu D sînt puncte *izolate* în D. Rezultă că funcţia f are în D un număr finit sau cel mult o infinitate numărabilă de zerouri, în acest din urmă caz ele acumulîndu-se în mod obligatoriu pe frontiera lui D.

4.20. **Teorema identităţii funcţiilor olomorfe.** *Două funcţii* f *şi* g *olomorfe pe un domeniu* D *sînt egale dacă şi numai dacă este verificată una dintre condiţiile*

(a) *mulţimea* $\{z \in D\,;\, \mathrm{f}(z) = \mathrm{g}(z)\}$ *are puncte de acumulare în* D.
(b) *există un punct* $a \in D$ *astfel încît* $\mathrm{f}^{(n)}(a) = \mathrm{g}^{(n)}(a)$ *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$.

Se aplică teorema (4.18), la funcţia f$-$g. □

Formulele lui Cauchy ne arătau că valorile luate de o funcţie olomorfă pe un cerc determinau univoc valorile ei în interior. Teorema (4.20) spune că este suficient să cunoaştem valorile unei funcţii olomorfe doar pe o submulţime care are cel puţin un punct de acumulare în domeniul de olomorfie, pentru ca funcţia să fie complet determinată.

4.21. **Corolar.** *Mulţimea* $\mathscr{H}(D)$ *formează un domeniu de integritate.*

Într-adevăr, dacă f, $\mathrm{g} \in \mathscr{H}(D)$ şi $\mathrm{f}\cdot\mathrm{g} \equiv 0$, iar $\mathrm{f} \not\equiv 0$, atunci mulţimea $A = A\,(\mathrm{f})$ a zerourilor lui f va fi formată din puncte izolate; pentru a avea $\mathrm{f}(z)\,\mathrm{g}(z) = 0$ în D, va trebui ca $\mathrm{g}(z) = 0$ pe mulţimea $D \setminus A$, care are puncte de acumulare în D, deci $\mathrm{g} \equiv 0$. □

4.22. **Principiul prelungirii olomorfe.** *Fie* f *o funcţie olomorfă pe domeniul* D. *Să presupunem că există un domeniu* $\widetilde{D} \supset D$ *şi o funcţie* $\tilde{\mathrm{f}} \in \mathscr{H}(\widetilde{D})$ *astfel încît* $\tilde{\mathrm{f}}|D = \mathrm{f}$. *Atunci funcţia* $\tilde{\mathrm{f}}$, *numită prelungirea olomorfă a lui* f *la* $\widetilde{\mathbf{D}}$, *este unică.*

Într-adevăr, dacă $\tilde{\mathrm{f}}_1 \in \mathscr{H}(\widetilde{\mathbf{D}})$ şi $\tilde{\mathrm{f}}_1|D = \mathrm{f}$, atunci $\tilde{\mathrm{f}}_1|D = \tilde{\mathrm{f}}|\,D$ şi deoarece D are puncte de acumulare în $\widetilde{D}$, conform teoremei (4.20) rezultă $\tilde{\mathrm{f}}_1 = \tilde{\mathrm{f}}$. □

§ 5. TEOREMA MAXIMULUI MODULULUI

Una dintre proprietățile importante ale unei funcții olomorfe neconstante pe un domeniu este aceea că nu își poate atinge maximul modulului într-un punct din acest domeniu. Această proprietate nu este evidentă nici măcar pentru polinoame.

4.23. **Teorema maximului modulului.** *Dacă funcția* f *este olomorfă pe un domeniu D și există un $z_0 \in D$ astfel încît* $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ *pentru orice $z \in D$, atunci* f *este constantă în D.*

Demonstrație. Să alegem un $R > 0$ astfel încît $U(z_0 ; R) \subset D$. Atunci pentru orice $r \in]0, R[$ avem

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \qquad \text{unde } \gamma = \delta U(z_0 ; r).$$

Deoarece $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, calculînd integrala, obținem

$$f(z_0) = \int_0^1 f(\gamma(t))\, dt.$$

Din ipoteză deducem

$$|f(z_0)| \leqslant \int_0^1 |f(\gamma(t))|\, dt \leqslant |f(z_0)|,$$

deci

$$\int_0^1 [\,|f(z_0)| - |f(\gamma(t))|\,]\, dt = 0.$$

Deoarece funcția de sub integrală este nenegativă și continuă, integrala nu poate fi nulă decît dacă $|f(\gamma(t))| = |f(z_0)|$, pentru orice $t \in [0,1]$. Cum aceasta are loc pentru orice $r \in]0, R[$, deducem că $|f(z)| = |f(z_0)|$, pentru orice $z \in U(z_0 ; R)$. Deoarece $|f|$ este constant pe discul $U(z_0 ; R)$, conform propoziției (2.49), deducem că f este o constantă pe acest disc și aplicînd teorema (4.20), rezultă că f este o constantă pe D. □

Menționăm că în teoremele (4.18)—(4.23) cerința ca D să fie un domeniu este esențială.

4.24. **Corolar.** *Dacă* f *este olomorfă pe un domeniu mărginit D și este continuă pe $\bar{D}$, atunci*

$$\max_{z \in \bar{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Funcția f fiind continuă pe $\bar{D}$ își atinge maximul într-un punct $z_0 \in \bar{D}$. Dacă f este constantă, $|f(z_0)|$ este maxim în orice punct $z_0 \in \bar{D}$. În caz contrar, nu putem avea $z_0 \in D$, conform teoremei maximului modulului, deci $z_0 \in \partial D$. □

4.25. **Corolar.** *Dacă funcția* f, *olomorfă pe domeniul* D, *nu are zerouri în* D *și* $|\mathrm{f}|$ *își atinge minimul într-un punct din* D, *atunci* f *este o constantă în* D.

Se aplică teorema (4.23) funcției $\dfrac{1}{\mathrm{f}}$, care este olomorfă pe D. □

4.26. **Lema lui Schwarz.** *Dacă* f *este o funcție olomorfă pe discul* $U = U(0\,;1)$ *și verifică condițiile* $\mathrm{f}(0) = 0$ *și* $|f(z)| < 1$, *pentru orice* $z \in U$, *atunci* $|\mathrm{f}(z)| \leqslant |z|$ *oricare ar fi* $z \in U$ *și* $|\mathrm{f}'(0)| \leqslant 1$. *Dacă* $|\mathrm{f}(z_0)| = |z_0|$, *pentru un anumit* $z_0 \in U$, *sau* $|\mathrm{f}'(0)| = 1$, *atunci există un număr complex* c, $|c| = 1$, *astfel încît* $\mathrm{f}(z) = cz$, *pentru orice* $z \in U$.

Demonstrație. 1) Vom defini funcția $\mathrm{g} : U \to \mathbf{C}$ prin $\mathrm{g}(z) = \dfrac{\mathrm{f}(z)}{z}$, pentru $z \neq 0$ și $\mathrm{g}(0) = \mathrm{f}'(0)$. Funcția g este continuă pe U și olomorfă pe discul punctat $\dot{U}$. Din (3.21), rezultă $\mathrm{g} \in \mathscr{H}(U)$. Fie $r \in]\,0,\,1\,[$. Conform corolarului (4.24), avem $|\mathrm{g}(z)| \leqslant \dfrac{1}{r}$, pentru orice $z \in \overline{U}(0\,;r)$. Făcînd pe r să tindă la 1, obținem $|\mathrm{g}(z)| \leqslant 1$, pentru orice $z \in U$. De aici rezultă $|\mathrm{f}(z)| \leqslant |z|$, pentru $z \in U$ și $|\mathrm{f}'(0)| = |\mathrm{g}(0)| \leqslant 1$. 2) Dacă există $z_0 \in \dot{U}$ astfel încît $|\mathrm{f}(z_0)| = |z_0|$, sau dacă $|\mathrm{f}'(0)| = 1$, rezultă că $|\mathrm{g}|$ își atinge valoarea maximă într-un punct din U și conform teoremei (4.23), g este o constantă c. Deoarece $|\mathrm{g}(z_0)| = 1$ (respectiv $|\mathrm{g}(0)| = 1$), deducem $|c| = 1$. Din $\mathrm{g}(z) = c$ se obține $\mathrm{f}(z) = cz$, pentru orice $z \in U$. □

Această lemă are următoarea interpretare geometrică; Dacă $\mathrm{f} \in \mathscr{H}(U)$, $\mathrm{f}(0) = 0$ și $\mathrm{f}(U) \subset U$, atunci $\mathrm{f}(U(0\,;\,r)) \subset U(0\,;r)$, pentru orice $r \in]\,0{,}1\,[$, iar egalitatea $\mathrm{f}(U(0\,;r)) = U(0\,;r)$, pentru un $r \in]\,0{,}1\,[$ are loc dacă și numai dacă $\mathrm{f}(z) = cz$, unde $|c| = 1$.

Lema lui Schwarz se poate ușor generaliza în cazul cînd $\mathrm{f} \in \mathscr{H}(U(z_0\,;r))$ și $|\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(z_0)| < R$, pentru orice $z \in U(z_0\,;r)$. Într-adevăr, considerînd funcția $\mathrm{g}(\zeta) = \dfrac{1}{R}\,[\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(z_0)]$, unde $z = z_0 + r\,\zeta$, avem $\mathrm{g} \in \mathscr{H}(U)$, $\mathrm{g}(0) = 0$ și $|\mathrm{g}(\zeta)| < 1$, pentru orice $\zeta \in U$. Din (4.26) deducem imediat

$$|\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(z_0)| \leqslant \frac{R}{r}\,|z - z_0| \quad \text{și} \quad |\mathrm{f}'(z_0)| \leqslant \frac{R}{r},$$

cazul de egalitate avînd loc dacă și numai dacă f este de forma $\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}(z_0) + c\dfrac{R}{r}\,(z - z_0)$, unde $|c| = 1$.

Interpretarea geometrică a acestui rezultat este următoarea: Dacă $\mathrm{f} \in \mathscr{H}(U(z_0\,;r))$ și $\mathrm{f}(U(z_0\,;r)) \subset U(\mathrm{f}(z_0)\,;R)$, atunci pentru orice $r_1 \in]0, r]$ are loc incluziunea $\mathrm{f}(U(z_0\,;r_1)) \subset U(\mathrm{f}(z_0)\,;R_1)$, unde $\dfrac{R_1}{R} = \dfrac{r_1}{r}$, egalitatea pentru un $r_1 \in]0, r[$ avînd loc dacă și numai dacă f are forma de mai sus.

4.27. **Teoremă.** *Fie* f *o funcție olomorfă neidentic nulă pe discul compact* $\overline{U}(0\,;r_0)$, *verificînd condițiile* $\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}'(0) = \ldots = \mathrm{f}^{(n-1)}(0) = 0$, $n \geqslant 1$.

Dacă pentru $z_0 \in \partial U(0, r_0)$ *avem*

$$|f(z_0)| = \max_{|z| \leqslant r_0} |f(z)|$$

atunci

$$\text{(a)} \qquad \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = m$$

$$\text{(b)} \qquad \mathbf{Re}\,\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geqslant m$$

unde m *este real și* $m \geqslant n$.

Demonstrație. 1) Dacă $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $\theta_0 \in [0,2\pi[$ și notăm $f(z) = R(\theta)\, e^{i\Phi(\theta)}$, pentru $z = r_0\, e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi[$, atunci, derivînd în raport cu θ, obținem

$$4.28. \qquad \frac{zf'(z)}{f(z)} = \Phi'(\theta) - i\frac{R'(\theta)}{R(\theta)}.$$

Deoarece f nu este identic nulă, iar θ_0 este un punct de maxim pentru $R(\theta)$, avem $R(\theta_0) > 0$ și $R'(\theta_0) = 0$, deci

$$\frac{z_0\, f'(z_0)}{f(z_0)} = \Phi'(\theta_0) = m,$$

unde m este un număr real. Pentru a arăta că $m \geqslant n$, să considerăm funcția $g : \overline{U} \to \mathbf{C}$ definită prin $g(0) = 0$ și

$$g(z) = \frac{f(z_0 z)}{f(z_0)\, z^{n-1}}, \qquad z \in \overline{U} = \overline{U}(0\,;1), \quad z \neq 0,$$

care este olomorfă pe $\overline{U}$. Din corolarul (4.24) deducem

$$|g(z)| \leqslant \max_{|z|=1} \left| \frac{f(z_0 z)}{f(z_0)\, z^{n-1}} \right| = 1,$$

pentru orice $z \in \overline{U}$. Aplicînd lema lui Schwarz, deducem $|g(z)| \leqslant |z|$, deci

$$\left| \frac{f(z_0 z)}{f(z_0)} \right| \leqslant |z|^n, \quad z \in \overline{U}.$$

În particular, punînd $z = r$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, avem

$$\mathbf{Re}\,\frac{f(z_0 r)}{f(z_0)} \leqslant r^n.$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{f(z_0 r)}{f(z_0)}\right)\Big|_{r=1} = \lim_{r\to 1}\frac{f(z_0 r) - f(z_0)}{(r-1)\,f(z_0)} =$$

$$= \lim_{r\to 1}\left[\left(1 - \frac{f(z_0 r)}{f(z_0)}\right)\frac{1}{1-r}\right]$$

Deoarece m este real, deducem

$$m = \lim_{r\to 1}\left[\left(1 - \mathbf{Re}\,\frac{f(z_0 r)}{f(z_0)}\right)\frac{1}{1-r}\right] \geqslant \lim_{r\to 1}\frac{1-r^n}{1-r} = n.$$

2) Pentru a demonstra inegalitatea (b), vom deriva în raport cu θ în (4.28) şi avem

$$i\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2\right] =$$

$$= \Phi''(\theta) - i\left[\frac{R''(\theta)}{R(\theta)} - \left(\frac{R'(\theta)}{R(\theta)}\right)^2\right].$$

Deoarece θ_0 este punct de maxim avem $R''(\theta_0) \leqslant 0$. Punînd $\theta = \theta_0$ în formula de mai sus şi folosind (a), deducem

$$\mathbf{Im}\left[\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 - m\right] = \Phi''(\theta_0) - i\,\frac{R''(\theta_0)}{R(\theta_0)}.$$

Egalînd părţile imaginare, obţinem

$$m\left[\mathbf{Re}\,\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 - m\right] = -\frac{R''(\theta_0)}{R(\theta_0)} \geqslant 0,$$

de unde deducem (b). □

Menţionăm că teorema (4.27), constituie în prezent un important instrument în studiul geometric al funcţiilor analitice.

§ 6. SERII LAURENT

Printr-o serie Laurent în jurul lui $z_0 \in \mathbf{C}$ înţelegem o serie de funcţii de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} +$$

$$+ a_0 + \ldots + a_n (z - z_0)^n + \ldots$$

unde a_n sînt numere complexe, care se numesc coeficienții seriei Laurent. Dacă $a_n = 0$ pentru orice $n < 0$, atunci seria Laurent se reduce la o serie de puteri. Mai observăm că pentru $n < 0$ funcția $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ este olomorfă în $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$, dar nu în $\mathbf{C}$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ se numește *partea principală*, iar seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ se numește *partea tayloriană* a seriei Laurent. Vom spune că seria Laurent converge (simplu sau uniform) pe o mulțime $E \subset \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ dacă atît partea principală cît și partea tayloriană converg (simplu sau uniform) pe E. În acest caz, dacă pentru $z \in E$, $\pi(z)$ este suma părții principale, iar $T(z)$ este suma părții tayloriene, suma $S(z)$ a seriei Laurent va fi definită prin

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \pi(z) + T(z), \quad z \in E.$$

4.29. **Teorema coroanei de convergență.** *Fie dată seria Laurent* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. *Să notăm*

$$r = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \quad \text{și} \quad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dacă $r < R$, *atunci*

(a) *În coroana circulară* $U(z_0; r, R)$, *numită coroană de convergență, seria Laurent converge absolut și uniform pe compacte.*

(b) *Seria diverge în* $\mathbf{C} \setminus \overline{U}(z_0; r, R)$.

(c) *Suma* $S(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *este o funcție olomorfă pe* $U(z_0; r, R)$.

Demonstrație. Partea tayloriană a seriei Laurent are discul de convergență $U(z_0; R)$ unde converge absolut și uniform pe compacte, iar suma ei este o funcție olomorfă. Partea principală se poate scrie sub forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$, unde $w = \dfrac{1}{z - z_0}\cdot$ Dar aceasta este o serie de puteri avînd discul de convergență $U\left(0; \dfrac{1}{r}\right)$, unde converge absolut și uniform pe compacte și suma ei este olomorfă. Deoarece $|w| < \dfrac{1}{r}$ înseamnă $|z - z_0| > r$, rezultă că partea principală converge absolut și uniform pe compacte în domeniul $\mathbf{C} \setminus \overline{U}(z_0; r)$, unde suma ei este olomorfă. Intersecția celor două domenii, în care cele două părți ale seriei Laurent converg simultan, este chiar coroana $U(z_0; r, R)$. Faptul că seria Laurent diverge în $\mathbf{C} \setminus \overline{U}(z_0; r, R)$ rezultă imediat din teorema discului de convergență. □

Dacă $R < r$, atunci coroana circulară este vidă și seria Laurent este divergentă în întreg planul $\mathbf{C}$. Dacă $R = r$, putem avea puncte de convergență numai pe cercul $\partial U(z_0; r)$. Mai observăm că $U(z_0; 0, R) = \dot{U}(z_0; R)$, $U(z_0; r, +\infty) = \mathbf{C}\setminus\overline{U}(z_0; r)$ și $U(z_0; 0, +\infty) = \mathbf{C}\setminus\{z_0\}$.

4.30. **Teorema identității coeficienților seriei Laurent.** *Dacă două serii Laurent* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *și* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-x_0)^n$ *în jurul lui* z_0 *au sumele egale pe o coroană* $U(z_0; r, R)$ *cu* $0 \leqslant r < R$, *atunci* $a_n = b_n$, *pentru orice* $n \in \mathbf{Z}$.

Demonstrație. Notînd $c_n = a_n - b_n$, seria Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, are suma nulă în $U(z_0; r, R)$, ca și seria obținută prin înmulțirea cu $(z-z_0)^{-n-1}$, adică,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^{k-n-1} = 0, \quad \text{pentru } z \in U(z_0; r, R).$$

Fie $\gamma = \partial U\left(z_0; \frac{r+R}{2}\right)$. Deoarece seria converge uniform pe $\{\gamma\}$ rezultă că o putem integra termen cu termen și avem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_\gamma (z-z_0)^{k-n-1}\,dz = 2\pi i\, c_n = 0,$$

deci $a_n = b_n$, pentru orice $n \in \mathbf{Z}$. □

Pentru funcțiile olomorfe pe o coroană circulară are loc următoarea teoremă de reprezentare globală prin serii Laurent.

4.31. **Teorema dezvoltării în serie Laurent.** *Dacă funcția* f *este olomorfă pe coroana* $D = U(z_0; r, R)$, $0 \leqslant r < R$, *atunci notînd, pentru orice* $n \in \mathbf{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta \tag{4.32}$$

unde $\gamma = \partial U(z_0; \rho)$, $r < \rho < R$, *seria Laurent* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *va avea o coroană de convergență ce include pe D și suma ei coincide cu* f, *adică are loc dezvoltarea*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in D.$$

Demonstrație. Observăm mai întîi că în (4.32), conform cu (3.38), integrala nu depinde de ρ ales în intervalul $]r, R[$. Fie $z \in D$ și alegem r'' și r' astfel încît $r < r'' < |z-z_0| < r' < R$. Conform cu (3.21), funcția g definită pe D prin $g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ pentru $\zeta \in D\setminus\{z\}$ și $g(z) = f'(z)$, este olomorfă pe D și notînd $\gamma' = \partial U(z_0; r')$ și $\gamma'' = \partial U(z_0; r'')$, din (3.38), deducem $\int_{\gamma'} g = \int_{\gamma''} g$. Deoarece $z \notin \overline{U}(z_0\,; r'')$ şi $z \in U(z_0\,; r')$, avem

$$\int_{\gamma''} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \text{ şi } \int_{\gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i.$$

Obţinem astfel

$$\int_{\gamma''} g = \int_{\gamma''} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma'} g = \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z)\, 2\pi i,$$

deci

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Această formulă este o extindere a formulei lui Cauchy în cazul unei coroane circulare.

Calculînd prima integrală ca la punctul (4.11), obţinem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{unde}$$

4.33. $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geqslant 0.$$

Pentru a calcula cea de a doua integrală, vom ţine seama că pentru $\zeta \in \{\gamma''\}$ avem $|\zeta - z_0| = r'' < r_0 = |z - z_0|$. Deoarece

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \, \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}},$$

folosind formula seriei geometrice, deducem că pentru $\zeta \in \{\gamma''\}$ seria

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^{m-1}}{(z - z_0)^m}$$

converge uniform şi are suma $-\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Integrînd termen cu termen, deducem

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''} f(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^{m-1}}{(z - z_0)^m} d\zeta =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} (z - z_0)^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{1} a_n (z - z_0)^n,$$

unde

4.34. $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma''} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad n < 0.$$

Obținem astfel dezvoltarea $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, unde coeficienții a_n sînt dați de (4.33), pentru $n \geqslant 0$ și (4.34), pentru $n < 0$. Deoarece funcția $\zeta \mapsto f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1}$ este olomorfă pe D, rezultă că, pentru orice $n \in \mathbf{Z}$, coeficientul a_n se poate calcula cu formula (4.32). □

Din teoremele (4.29), (4.30) și (4.31) deducem

4.35. **Teoremă.** *Fie* $D = U(z_0; r, R)$, $0 \leqslant r < R$ *și fie* A *mulțimea șirurilor* $(a_n; n \in \mathbf{Z})$ *astfel încît seria Laurent* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *să conveargă pentru orice* $z \in D$. *Există o aplicație unică, bijectivă și liniară* $L : \mathscr{H}(D) \to A$, *cu proprietatea că dacă* $L(f) = (a_n)$, *atunci* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *pentru orice* $z \in D$. *Coeficienții* a_n *sînt dați de formula* (4.32). □

§ 7. PUNCTE SINGULARE

O problemă importantă în teoria funcțiilor analitice este studiul comportării unei funcții olomorfe pe un domeniu în jurul unui punct aparținînd frontierei acestui domeniu. Cazul cel mai simplu este acela cînd punctul respectiv este izolat.

4.36. **Definiție.** Fiind dată o funcție f olomorfă pe mulțimea deschisă $G \subset \mathbf{C}$, un punct $z_0 \in \mathbf{C}$ se numește *punct singular izolat* al funcției f dacă $z_0 \notin G$, dar există o vecinătate punctată a lui z_0 inclusă în G, adică există un $R > 0$ astfel încît $\dot{U}(z_0; R) \subset G$.

Evident că dacă z_0 este punct singular izolat, el aparține frontierei lui G și $G \cup \{z_0\}$ este o mulțime deschisă, iar dacă G este un domeniu, $G \cup \{z_0\}$ este de asemenea un domeniu.

4.37. **Definiție.** Punctul singular izolat z_0 al funcției $f \in \mathscr{H}(G)$ se zice că este *eliminabil* dacă f se poate prelungi olomorf în $\widetilde{G} = G \cup \{z_0\}$, adică dacă există $\tilde{f} \in \mathscr{H}(\widetilde{G})$ astfel încît $\tilde{f}|G = f$. Punctele mulțimii de olomorfie G împreună cu punctele singulare eliminabile se numesc *puncte regulare* ale funcției f.

4.38. **Propoziție.** *Punctul singular* z_0 *al funcției* $f \in \mathscr{H}(G)$ *este eliminabil dacă și numai dacă există limita finită* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Într-adevăr, dacă vom defini $\tilde{f}(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ și $\tilde{f}|G = f$, funcția f va fi continuă pe $\widetilde{G}$ și olomorfă pe G și conform cu (3.21) ea va fi olomorfă pe $\widetilde{G}$. □

Uneori vom nota tot cu f funcția astfel prelungită punînd $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Propoziția (4.38) ne spune că pentru ca o funcție olomorfă să poată fi prelungită olomorf într-un punct singular izolat este suficient ca ea să poată fi prelungită prin continuitate în acest punct.

4.39. *Exemple.* 1) Funcţia $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ este definită şi olomorfă pe $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, iar $z_0=0$ este eliminabil deoarece putem defini funcţia f în origine prin $f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\sin z}{z}=(\sin z)'|_{z=0}=\cos 0=1$.

Mai general, dacă f este o funcţie olomorfă pe G şi $z_0\in G$, funcţia $g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, definită pentru $z\in G\setminus\{z_0\}$, este olomorfă pe $G\setminus\{z_0\}$ şi z_0 este un punct singular eliminabil pentru g, deoarece putem defini $g(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$.

2) Funcţia $f(z)=\frac{1}{z}$, definită şi olomorfă pe $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, are în $z_0=0$ un punct singular neeliminabil. Observăm că în acest caz $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\infty$, deci există limită, dar nu este finită.

3) Funcţia $f(z)=\sin\frac{1}{z}$, definită şi olomorfă pe $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, are în $z_0=0$ un punct singular neeliminabil. Menţionăm că în acest caz nu există limita lui f în punctul $z_0=0$.

Instrumentul principal pentru studiul comportării unei funcţii olomorfe în jurul unui punct singular izolat îl constituie seria Laurent. Fie $f\in\mathscr{H}(G)$ şi z_0 un punct singular izolat al funţiei f şi fie $R>0$ astfel ca $\dot{U}(z_0;R)\subset G$. Din teorema (4.31), rezultă că în $\dot{U}(z_0;R)$ funcţia f se dezvoltă în serie Laurent, adică

4.40.
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad z\in\dot{U}(z_0;R)$$

unde

4.41.
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\qquad \gamma=\delta U(z_0;r),\qquad 0<r<R.$$

Coeficientul $a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ se numeşte *reziduul* funcţiei f în punctul z_0 şi se notează $a_{-1}=\mathbf{Rez}(f,z_0)$.

4.42. **Propoziţie.** *Un punct singular izolat z_0 al funcţiei $f\in\mathscr{H}(G)$ este eliminabil dacă şi numai dacă partea principală a dezvoltării în serie Laurent a funcţiei f în jurul lui z_0 este nulă, adică $a_n=0$ pentru orice $n<0$.*

Demonstraţie. 1) Dacă z_0 este punct singular eliminabil şi $\tilde{f}$ este prelungirea olomorfă a lui f la $G\cup\{z_0\}$, atunci $\tilde{f}$ are o dezvoltare tayloriană în $U(z_0;R)\subset\tilde{G}$. Deoarece $\tilde{f}$ coincide cu f în $\dot{U}(z_0;R)$, din teorema (4.30) (a identităţii coeficienţilor seriei Laurent) rezultă că dezvoltarea (4.40) coincide cu dezvoltarea tayloriană a lui $\tilde{f}$, deci seria Laurent (4.40) se reduce la partea sa tayloriană. 2) Dacă seria (4.40) are numai parte tayloriană, suma acestei serii de puteri va fi olomorfă pe $U(z_0; R)$ și egală cu f pe $\dot{U}(z_0; R)$, deci f se poate prelungi olomorf în z_0, adică z_0 este eliminabil. □

De aici rezultă că dacă z_0 este un punct regular al funcției $f \in \mathscr{H}(G)$, dezvoltarea Laurent a lui f într-un disc punctat centrat în z_0 este o serie tayloriană.

Noțiunea de zero se poate extinde și în cazul punctelor regulare și anume vom înțelege prin *zero* al funcției $f \in \mathscr{H}(G)$ orice punct *regular* al lui f pentru care $\tilde{f}(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$. Toate proprietățile zerourilor funcțiilor olomorfe, puse în evidență în paragraful 4, se păstrează și în acest caz.

4.43. **Criteriul lui Cauchy-Riemann de eliminabilitate.** *Un punct singular izolat z_0 al unei funcții $f \in \mathscr{H}(G)$ este eliminabil dacă și numai dacă există o vecinătate punctată a lui z_0 în care f este mărginită.*

Demonstrație. 1) Dacă z_0 este punct singular eliminabil și $\tilde{f}$ este prelungirea olomorfă a lui f, alegînd un $r > 0$ astfel ca $\bar{U}(z_0; r) \subset \tilde{G}$, $\tilde{f}$ va fi mărginită pe compactul $\bar{U}(z_0; r)$, deci pe $\dot{U}(z_0; r)$, unde coincide cu f. 2) Să presupunem că există un $R > 0$ și $M > 0$ astfel ca $\dot{U}(z_0; R) \subset G$ și $|f(z)| \leqslant M$, pentru orice $z \in \dot{U}(z_0; R)$. Din formula (4.41) rezultă că pentru orice $r \in \,]0, R[$ și orice $n \in \mathbf{Z}$ au loc inegalitățile

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

Făcînd $r \to 0$, rezultă că pentru orice $n < 0$ avem $a_n = 0$ și conform cu (4.42) punctul z_0 este eliminabil. □

4.44. **Corolar.** *Dacă z_0 este un punct singular izolat neeliminabil pentru $f \in \mathscr{H}(G)$, atunci există un șir (z_n), $z_n \in G$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, astfel încît* $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = \infty$. □

Acest corolar ne permite să dăm următoarea clasificare a punctelor singulare izolate neeliminabile.

4.45. **Definiție.** Un punct singular izolat z_0 al funcției $f \in \mathscr{H}(G)$ se numește *pol* dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$; el se numește *punct singular esențial* izolat dacă f nu are limită în z_0.

Dacă z_0 este un pol al funcției f atunci f se poate prelungi în z_0 definind $f(z_0) = \infty$. În acest fel funcția f devine $\mathbf{C}_\infty$ — continuă în punctul z_0 (adică continuă în topologia lui $\mathbf{C}_\infty$).

O caracterizare mai completă a polilor este dată de următoarea

4.46. **Teoremă.** *Dacă z_0 este un punct singular izolat al funcției $f \in \mathscr{H}(G)$, atunci următoarele afirmații sînt echivalente*

(a) *z_0 este un pol.*

(b) *z_0 este un punct regular și anume un zero pentru* $\frac{1}{f}$.

(c) *Există un $n \in \mathbf{N}^*$ unic astfel încît într-un disc punctat centrat în z_0 să aibă loc dezvoltarea*

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots \tag{4.47}$$

(d) *Există un* $n \in \mathbf{N}^*$ *unic şi o funcţie unică* $g \in \mathcal{H}(G \cup \{z_0\})$ *astfel încît* $g(z_0) \neq 0$ *şi*

4.48. $$f(z) = (z-z_0)^{-n}\, g(z), \textit{ pentru orice } z \in G.$$

Demonstraţie. 1) (a) $\Rightarrow$ (b). Deoarece $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, există $r > 0$ astfel încît $\dot{U}(z_0\,;\, r) \subset G$ şi $|f(z)| > 1$, pentru orice $z \in \dot{U}(z_0\,;\, r)$. De aici rezultă că funcţia $h = \frac{1}{f}$ este olomorfă pe $\dot{U}(z_0\,;\, r)$ şi $|h(z)| < 1$, pentru orice $z \in \dot{U}(z_0\,;\, r)$. Conform criteriului (4.43), punctul z_0 este eliminabil pentru h, deci regular; el va fi chiar un zero al lui h, deoarece $\lim\limits_{z \to z_0} h(z) = 0 = h(z_0)$.

2) (b) $\Rightarrow$ (c). Fie h prelungirea olomorfă a lui $\frac{1}{f}$ în discul $U(z_0\,;r) \subset \tilde{G}$. Evident că h nu este identic nulă în acest disc şi deci z_0 este un zero izolat al lui h, avînd un ordin de multiplicitate bine determinat $n \in \mathbf{N}^*$. Deci există $h_1 \in \mathcal{H}(U(z_0\,;\, r))$ astfel ca $h_1(z_0) \neq 0$ şi $h(z) = (z - z_0)^n h_1(z)$, pentru orice $z \in U(z_0\,;\, r)$. Se poate alege $r > 0$ astfel încît $h_1(z) \neq 0$, pentru $z \in U(z_0\,; r)$, deci funcţia $g_1 = \frac{1}{h_1}$ va fi olomorfă pe $U(z_0\,; r)$ şi $g_1(z_0) \neq 0$. Deoarece h coincide cu $\frac{1}{f}$ în $\dot{U}(z_0\,; r)$, vom avea $f(z) = (z - z_0)^{-n} g_1(z)$, pentru orice $z \in \dot{U}(z_0\,;\, r)$. Funcţia g_1 admite o dezvoltare tayloriană în jurul lui z_0, pe care o scriem sub forma $g_1(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \ldots$, unde $a_{-n} = g_1(z_0) \neq 0$. Rezultă că în $\dot{U}(z_0\,;\, r)$ funcţia f va avea dezvoltarea (4.47). Unicitatea lui n rezultă din (4.30).

3) (c) $\Rightarrow$ (d). Să definim $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$, pentru $z \in G$ şi $g(z_0) = a_{-n}$. Din (3.21) deducem că g este olomorfă pe $G \cup \{z_0\}$, iar $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$, pentru $z \in G$. Unicitatea lui n şi g se deduce uşor din condiţia $g(z_0) \neq 0$.

4) (d) $\Rightarrow$ (a). Deoarece $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) \neq 0$, din (4.48) deducem $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, deci z_0 este un pol al lui f. ☐

4.49. *Observaţii.* 1) Numărul n pus în evidenţă în teorema (4.46) se numeşte *ordinul* polului z_0. Tot din această teoremă deducem că z_0 este un pol de ordinul n pentru f dacă şi numai dacă el este un zero de acelaşi ordin pentru $\frac{1}{f}$.

2) Partea principală a dezvoltării Laurent (4.47) are un *număr finit de termeni*, iar această proprietate caracterizează polii.

3) Dacă z_0 este un punct singular esenţial izolat al lui f, atunci partea principală a seriei Laurent (4.40) are o *infinitate de termeni*, adică există o infinitate de coeficienţi nenuli cu indice negativ. Conform teoremei (4.46), această proprietate caracterizează punctele singulare esenţiale izolate. Deci dacă z_0 este un punct singular izolat al funcţiei f, el va fi eliminabil, pol sau singular esenţial, după cum partea principală a seriei Laurent (4.40) este nulă, are un număr finit de termeni sau o infinitate de termeni. Este important de subliniat că în această clasificare a punctelor singulare izolate se consideră dezvoltarea Laurent într-un *disc punctat* centrat

în z_0 și nu dezvoltarea Laurent într-o coroană $U(z_0; r, R)$, cu $0 < r < R$. De exemplu, dacă $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)(z-2)}$, descompunînd în fracții simple și utilizînd seria geometrică, se deduce ușor că dezvoltarea Laurent a funcției f în coroana $U(0; 1, 2)$ este dată de

$$f(z) = \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{8} + \ldots + \frac{z^n}{2^{n+2}} + \ldots,$$

care are partea principală formată dintr-o infinitate de termeni, deși punctul $z_0 = 0$ este un pol simplu al funcției f, care în $\dot{U}(0; 1)$ are dezvoltarea

$$f(z) = -\frac{1}{2z} - \frac{3}{4} - \ldots - \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n + \ldots .$$

4.50. **Propoziție.** *Dacă z_0 este un punct singular esențial izolat al funcției $f \in \mathscr{H}(G)$, atunci el este punct singular esențial izolat sau punct de acumulare de poli pentru $\frac{1}{f}$.*

Într-adevăr, dacă z_0 nu este punct de acumulare de zerouri ale lui f, atunci există un $r > 0$ astfel încît $\dot{U}(z_0; r) \subset G$ și $f(z) \neq 0$, pentru orice $z \in \dot{U}(z_0; r)$. Rezultă că $\frac{1}{f}$ este olomorfă în $\dot{U}(z_0; r)$, deci z_0 este singular izolat pentru $\frac{1}{f}$; el nu poate fi eliminabil sau pol pentru $\frac{1}{f}$ deoarece ar fi eliminabil sau pol pentru f. Deci z_0 este esențial izolat pentru $\frac{1}{f}$. Dacă z_0 este un punct de acumulare de zerouri ale lui f, atunci, deoarece aceste zerouri sînt poli pentru $\frac{1}{f}$, rezultă că z_0 este un punct de acumulare de poli pentru $\frac{1}{f}$. □

De exemplu, punctul $z_0 = 0$ este un punct de acumulare de poli pentru funcția $f(z) = \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$, care este olomorfă pe domeniul $\mathbf{C} \setminus \setminus \left\{\dfrac{1}{k\pi};\ k \in \mathbf{Z}\right\}$. În adevăr, punctele $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ sînt poli simpli, care se acumulează în origine.

4.51. *Observație.* Propoziția (4.50) pune în evidență un nou tip de punct singular, care nu mai este izolat, anume este *punct de acumulare de poli.* Corolarul (4.43) este evident valabil și în cazul unui astfel de punct singular.

O primă informație privind comportarea unei funcții olomorfe în jurul unui punct singular esențial izolat este dată de

4.52. **Teorema lui Casorati-Weierstrass.** *Dacă z_0 este un punct singular esențial izolat al funcției* $f \in \mathscr{H}(G)$, *atunci oricare ar fi* $w_0 \in \mathbf{C}_\infty$ *există un șir* (z_n), $z_n \in G$ *cu* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, *astfel încît* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$.

Demonstrație. Dacă $w_0 = \infty$, concluzia teoremei rezultă din corolarul (4.44). Dacă $w_0 \in \mathbf{C}$, conform propoziției (4.50), punctul z_0 este punct singular esențial izolat sau punct de acumulare de poli pentru funcția $g = \dfrac{1}{f - w_0}$ și din (4.44) și (4.51), deducem că există un șir (z_n), $z_n \in G$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$. □

De exemplu, să considerăm funcția $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{1!z} + \ldots$, care este olomorfă pe $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Punctul $z_0 = 0$ este singular esențial izolat, deoarece parte principală a seriei Laurent în vecinătatea punctată $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ are o infinitate de termeni. Dacă $w_0 = \infty$, putem lua $z_n = \dfrac{1}{n}$ și avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} e^n = \infty$; dacă $w_0 = 0$, putem lua $z_n = -\dfrac{1}{n}$ și avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$. Dacă $w_0 \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, ecuația $f(z) = w_0$ are rădăcinile $z_n = \dfrac{1}{\ln|w_0| + i(\arg w_0 + 2n\pi)}$, care se acumulează în 0. Rezultă că, oricare ar fi $w_0 \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, funcția f chiar ia valoarea w_0 în orice vecinătate a punctului 0. Acest rezultat este de fapt un caz particular al unei celebre *teoreme*, datorată lui *Picard*, care afirmă că *în orice vecinătate a unui punct singular esențial izolat al unei funcții olomorfe, această funcție ia orice valoare finită, exceptînd cel mult o singură valoare, numită valoare excepțională.*

4.53. *Comportarea la ∞ a unei funcții olomorfe.* Fie $f \in \mathscr{H}(G)$ și să presupunem că există un $R > 0$ astfel încît $\{z \in \mathbf{C}\,;\, |z| > R\} \subset G$. Vom spune în acest caz că punctul ∞ este un *punct singular izolat* al lui f. Pentru a studia comportarea funcției f la ∞, vom considera funcția $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, care este olomorfă pe $\dot{U}\left(0\,;\dfrac{1}{R}\right)$, deci $z_0 = 0$ va fi un punct singular izolat pentru g. Vom spune că ∞ este eliminabil, pol de ordinul n, respectiv punct singular, esențial izolat al funcției f, după cum 0 este eliminabil, pol de ordinul n, respectiv punct singular esențial izolat al funcției g.

De exemplu, fie f o funcție întreagă (adică olomorfă pe $\mathbf{C}$), avînd dezvoltarea

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Deoarece

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots, \quad z \in \mathbf{C}\setminus\{0\},$$

care este o dezvoltare Laurent a funcției g într-o vecinătate punctată a lui 0, deducem că punctul ∞ este eliminabil, pol de ordinul n sau esențial izolat al lui f, după cum funcția întreagă f este o constantă, un polinom de gradul n sau nu se reduce la un polinom (în acest ultim caz funcția f se mai numește *transcendentă întreagă*).

Este posibil ca punctul ∞ să fie punct de acumulare de poli. De exemplu, funcția $f(z) = \mathrm{ctg}\, z$ are polii $z_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, care se acumulează la ∞.

§ 8. FUNCȚII MEROMORFE

4.54. **Definiție.** Fie $\widetilde{G}$ o mulțime deschisă din $\mathbf{C}$ (sau $\mathbf{C}_\infty$). Vom spune că f este o funcție *meromorfă* pe $\widetilde{G}$ dacă există o mulțime $E \subset \widetilde{G}$ astfel încît $f \in \mathscr{H}(\widetilde{G} \setminus E)$, iar E este formată din puncte singulare eliminabile sau poli pentru funcția f. Notînd cu G mulțimea punctelor regulare și cu B mulțimea polilor din $\widetilde{G}$, avem $\widetilde{G} = G \cup B$.

Evident că G este o mulțime deschisă și este un domeniu dacă $\widetilde{G}$ este un domeniu. Mulțimea B este formată din puncte izolate, deci are un număr finit sau o infinitate numărabilă de puncte, care nu se pot acumula în $\widetilde{G}$.

Din definiție rezultă imediat că o funcție este meromorfă pe $\widetilde{G}$ dacă și numai dacă oricare ar fi $z_0 \in \widetilde{G}$ există un disc punctat centrat în z_0, inclus în $\widetilde{G}$, în care funcția se poate dezvolta într-o serie Laurent cu partea principală formată dintr-un număr finit de termeni. Această parte principală este nulă dacă și numai dacă $z_0 \in G$. Ca și în cazul funcțiilor olomorfe (teorema (4.14)), remarcăm caracterul *local* al reprezentării unei funcții meromorfe pe o mulțime deschisă oarecare, prin serii Laurent.

Vom nota cu $\mathscr{M}(\widetilde{G})$ mulțimea funcțiilor meromorfe pe $\widetilde{G}$. Dacă $f \in \mathscr{M}(\widetilde{G})$, atunci f se poate prelungi în orice punct $z_0 \in \widetilde{G}$ prin $\widetilde{f}(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. Funcția $\widetilde{f} : \widetilde{G} \to \mathbf{C}_\infty$ este $\mathbf{C}_\infty$ — continuă și $\widetilde{f} \in \mathscr{H}(G)$. Uneori se notează tot cu f funcția astfel prelungită.

4.55. *Exemple.* 1) Orice funcție olomorfă pe $\widetilde{G}$ este și meromorfă, adică $\mathscr{H}(\widetilde{G}) \subset \mathscr{M}(\widetilde{G})$. În acest caz $B = \emptyset$ și $\widetilde{G} = G$.

2) Orice funcție rațională este meromorfă pe $\mathbf{C}_\infty$.

3) Funcția ctg z este meromorfă pe $\mathbf{C}$, avînd polii $z_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; punctul ∞ este punct de acumulare de poli, deci funcția ctg nu poate fi meromorfă pe $\mathbf{C}_\infty$.

4) Funcția $\mathrm{tg}\,\dfrac{1}{z}$ este meromorfă pe $\mathbf{C}_\infty \setminus \{0\}$, deoarece ∞ este un punct regular, iar punctele $z_k = \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ sînt poli, care se acumulează în origine.

4.55. **Propoziție.** *Mulțimea* $\mathscr{M}(\widetilde{G})$ *este un corp comutativ.*

Într-adevăr, dacă $f, g \in \mathscr{M}(\widetilde{G})$, funcția fg nu poate avea în $\widetilde{G}$ decît puncte regulare sau poli, ca și $\dfrac{f}{g}$. □

4.56. **Propoziție.** *O funcție este meromorfă pe* $\mathbf{C}_\infty$ *dacă și numai dacă ea este o funcție rațională.*

Demonstrație. 1) Dacă f este rațională, ea este meromorfă pe $\mathbf{C}_\infty$, conform cu (2.83). 2) Dacă f este meromorfă pe $\mathbf{C}_\infty$, ea are un număr finit de poli, pentru că în caz contrar, ar avea un punct de acumulare de poli, care nu ar fi nici punct regular nici pol al lui f. Să presupunem că ∞ este un punct regular și fie $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ mulțimea polilor lui f. În jurul polului b_k funcția f se dezvoltă în serie Laurent $f(z) = \pi_k(z) + T_k(z)$, unde π_k este partea principală, iar T_k este partea tayloriană a seriei. Pentru funcția $g = f - \sum_{k=1}^{n} \pi_k$ punctele b_k sînt singularități izolate eliminabile, deoarece dezvoltarea lui g în jurul lui b_k va fi tayloriană. Deoarece punctele din $\mathbf{C}_\infty \setminus B$ sînt regulare pentru g, rezultă că prelungirea $\tilde{g}$ a lui g la $\mathbf{C}_\infty$ va fi olomorfă pe $\mathbf{C}$ (întreagă). Deoarece ∞ este un punct regular, din (4.53) rezultă că $\tilde{g}$ va fi o constantă, deci și g, de unde deducem că $f = g + \sum_{k=1}^{n} \pi_k$ va fi o funcție rațională. Dacă ∞ este un pol al lui f, iar a un punct regular, definind $h(z) = f\left(\frac{1}{z} + a\right)$, funcția h va fi meromorfă pe $\mathbf{C}_\infty$ iar ∞ va fi un punct regular al lui h, deci h va fi o funcție rațională. Dar atunci $f(z) = h\left(\frac{1}{z - a}\right)$ va fi tot o funcție rațională. □

Această propoziție ne arată că dacă vrem să cuprindem o clasă de funcții meromorfe mai puțin banală decît cea a funcțiilor raționale, va trebui să apelăm la funcții al căror domeniu de meromorfie să difere de $\mathbf{C}_\infty$. Clasa cea mai importantă este cea a funcțiilor meromorfe pe $\mathbf{C}$, care se mai numesc, pe scurt, funcții *meromorfe*.

CAPITOLUL V

TEORIA REZIDUURILOR

După prezentarea în capitolele precedente ale celor mai importante rezultate teoretice privind funcțiile olomorfe, vom da în acest capitol mai întîi o propoziție centrală a teoriei integralelor complexe: teorema reziduurilor din care vom deduce în continuare aplicații. Unele din ele privesc calcularea unor integrale reale (proprii și improprii), altele contribuie la rezolvarea unei probleme de bază ale algebrei: determinarea numărului de rădăcini ale unei ecuații într-un domeniu dat. Vom folosi însă teorema reziduurilor și pentru aprofundarea studiului funcțiilor meromorfe.

§ 1. TEOREMA REZIDUURILOR

Numeroase teoreme anterioare pot fi folosite la calcularea unor integrale complexe de-a lungul unui contur cum ar fi teorema lui Cauchy sau formulele lui Cauchy. Teorema reziduurilor le generalizează permițînd calcularea integralei dintr-o funcție olomorfă f și în cazul cînd în „interiorul'' conturului după care integrăm se află și puncte singulare izolate ale funcției f.

În formularea acesteia ne folosim de noțiunea de reziduu al unei funcții introdus în capitolul precedent, cea de index al unui drum în raport cu un punct introdus la (3.23) și sume de forma $S = \sum_{z \in G} h(z)$. Dacă $h(z)$ ia valoare nenulă numai pentru un număr finit de valori $z_k \in G$, atunci suma S va fi prin definiție suma acestora și spunem că S e o sumă *finită*.

5.1. **Teorema reziduurilor.** *Fie f o funcție olomorfă pe mulțimea deschisă G, S mulțimea punctelor ei singulare izolate, $\widetilde{G} = G \cup S$ iar γ un contur din G omotop cu zero în $\widetilde{G}$. Atunci suma*

$$\sum_{z \in \widetilde{G}} n(\gamma, z) \, \mathbf{Rez} \, (\mathrm{f} \, ; z) \text{ \textit{e finită și}}$$

$$\int_{\gamma} \mathrm{f} = 2\pi \mathrm{i} \cdot \sum_{z \in \widetilde{G}} n \, (\gamma. \, z) \, \mathbf{Rez} \, (\mathrm{f} \, ; z)$$

Demonstrație. Fie $T = [0,1]$, iar φ deformarea din $\widetilde{G}$ a lui γ în drumul constant γ_0. Atunci $K = \varphi(T \times T)$ va fi o parte compactă din $\widetilde{G}$, iar aceasta din urmă o parte deschisă din $\mathbf{C}$. Notînd $\varepsilon = \frac{1}{2} d(K, \mathbf{C} \setminus \widetilde{G})$, mulțimea $D = \cup \{U(z;\varepsilon) : z \in K\}$ va fi mărginită deci $K_1 = \bar{D}$ compactă și $K \subset D \subset K_1 \subset \widetilde{G}$. Avînd $\varphi(T \times T) \subset D$, γ și γ_0 sînt omotope și în D. $K_1 \cap S$ e finită, căci în caz contrar ar admite un punct de acumulare în $\widetilde{G}$, contrar definiției lui $\widetilde{G}$.

Fie $D \cap S = \{b_1, \dots, b_n\}$ și să notăm cu $\pi_k(z)$ partea principală a lui f în b_k. Funcția $g = f - \sum_{k=1}^{n} \pi_k$ admite o prelungire olomorfă g_1 la D și conform teoremei lui Cauchy avem

$$\int_\gamma g = \int_\gamma g_1 = \int_{\gamma_0} g_1 = 0, \text{ deci } \int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma \pi_k$$

Trebuie să calculăm $\int_\gamma \pi_k$ unde $\pi_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}^{(k)}}{(z-b_k)^m}$. Seria fiind uniform convergentă pe orice parte compactă din $\mathbf{C} \setminus \{b_k\}$ deci și pe $\{\gamma\}$ putem integra termen cu termen iar $\int_\gamma \frac{dz}{(z-b_k)^m} = 0$ pentru orice $m > 1$ funcția $\frac{1}{(z-b_k)^m}$ admițînd primitivă și $\int_\gamma \frac{dz}{z-b_k} = 2\pi i\, n(\gamma, b_k)$ deci $\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, b_k). \mathbf{Rez}(f; b_k)$.

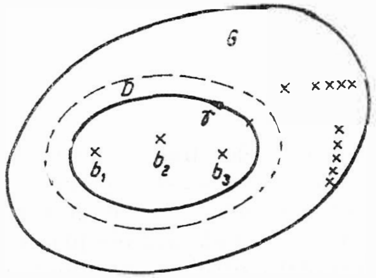


Fig. 5.1

Pentru a demonstra teorema mai trebuie să arătăm că pentru orice $z_0 \in \widetilde{G} \setminus (D \cap S)$ avem $n(\gamma, z_0). \mathbf{Rez}(f; z_0) = 0$.

Într-adevăr, dacă pentru $z_0 \in \widetilde{G} \setminus (D \cap S)$ avem $\mathbf{Rez}(f; z_0) \neq 0$, atunci $z_0 \in S$, deci $z_0 \notin D$ și $n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0$ căci $h(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z_0}$ e olomorfă în D unde γ și γ_0 sînt omotope. Prin urmare

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{z \in \widetilde{G}} n(\gamma, z). \mathbf{Rez}(f; z)$$

5.2. *Observație.* Cînd γ e un drum circular, triunghiular sau semicircular, ($\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ unde γ_1 e drumul liniar din $z_0 - r$ în $z_0 + r$, iar $\gamma_2(t) = z_0 + re^{i\pi t}$), atunci $\int_\gamma f = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Rez}(f; b_k)$ unde $b_1, \dots, b_n$ sînt punctele singulare ale lui f, interioare drumului γ.

5.3. **Calcularea reziduului într-un pol.** a) Dacă z_0 e un pol de ordin k pentru f, atunci

$$\mathbf{Rez}\,(\mathrm{f}\,;z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^k\,\mathrm{f}(z)]^{(k-1)}$$

Într-adevăr, $\mathrm{f}(z)=\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+\dots$ într-o vecinătate punctată a lui z_0, deci $[(z-z_0)^k\,\mathrm{f}(z)]^{(k-1)}=(k-1)!\,a_{-1}+k!\,a_0(z-z_0)+\dots$ $\dots$ și $\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^k\,\mathrm{f}(z)]^{(k-1)}=(k-1)!\,a_{-1}$

b) Dacă z_0 e un pol de ordin întîi pentru f, atunci **Rez** $(\mathrm{f}\,;z_0)=$ $=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\,\mathrm{f}(z)$. Caz particular:

dacă $\mathrm{f}(z)=\frac{\mathrm{g}(z)}{\mathrm{h}(z)}$ și g, h $\in\mathcal{H}(G)$, $z_0\in G$, $\mathrm{h}(z_0)=0$ și $\mathrm{h}'(z_0)\neq 0$, atunci $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\,\mathrm{f}(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{g}(z)}{\frac{\mathrm{h}(z)-\mathrm{h}(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\mathrm{g}(z_0)}{\mathrm{h}'(z_0)}$. Deci **Rez** $(\mathrm{f},z_0)=\frac{\mathrm{g}(z_0)}{\mathrm{h}'(z_0)}$.

c) În cazul unui punct singular esențial reziduul se poate afla numai din dezvoltarea în serie Laurent. Într-un punct regular rezdiduul este 0.

d) Dacă $z_0=\infty$ e un punct singular izolat al funcției f, adică f este olomorfă într-o vecinătate punctată $U(0\,;r,+\infty)$ a lui ∞, atunci f se poate dezvolta aici în serie Laurent

$$\mathrm{f}(z)=\dots+\frac{a_{-n}}{z^n}+\dots+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$$

Vom defini și aici reziduul lui f în ∞ și anume în așa fel încît teorema să rămînă valabilă, avînd în vedere că în cazul unui punct singular propriu $z_0\in\mathbf{C}$ dacă f e olomorfă în $U(z_0\,;\,0,r_1)$ și $\gamma_0=\delta U(z_0\,;r_0)$ cu $0<r_0<r_1$, atunci (vezi (5.2)) $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\mathrm{f}=$ **Rez** (f,z_0). Să calculăm deci și pentru ∞ integrala lui f de-a lungul unui drum din domeniul punctat de olomorfie, ce are față de ∞ indexul 1. Fie deci $\gamma_1=\delta U(0\,;r_2)$ cu $r<r_2$ și $\gamma=\gamma_1^-$ și să calculăm $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\mathrm{f}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\,\zeta^n\right]d\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\int_{\gamma}\zeta^n\,d\zeta$, din cauza convergenței uniforme a seriei Laurent pe $\{\gamma\}$ și ca și la (5.1) toți termenii sînt nuli cu excepția lui $n=-1$ și din cauza orientării schimbate a lui γ avem $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\mathrm{f}=-a_{-1}$. Prin urmare vom defini **Rez** $(\mathrm{f}\,;\infty)=-a_{-1}$.

Utilitatea acestei definiții reiese din următoarea teoremă:

5.4. **Teoremă.** *Fie f olomorfă în* $D=\mathbf{C}\setminus\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$ *și notăm* $z_{n+1}=\infty$. *Atunci* $\sum_{k=1}^{n+1}$ **Rez** $(\mathrm{f},z_k)=0$.

Demonstrație. Fie $\gamma_1 = \partial U\ (0, r_1)$ unde $r_1 > \max\ \{|z_1| \ldots |z_n|\}$. Aplicînd (5.2) avem $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} f = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{Rez}(f, z_k)$, iar după ((5.3), d), $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} f = -\mathbf{Rez}\ (f, \infty)$. Deci, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathbf{Rez}\ (f, z_k) = 0$.

Importanța practică a reziduului în ∞ constă în posibilitatea de a simplifica calculul unor integrale pe un contur. Dacă f e olomorfă în $\mathbf{C}\setminus\{z_1, z_2, \ldots, z_n)\}$ și se cere să se calculeze integrala lui f de-alungul unui contur γ a cărui index este 1 față de majoritatea punctelor singulare, de ex., $z_1, \ldots, z_m$, iar față de rest este 0, atunci teorema reziduurilor va permite calcularea ei dacă se determină suma $\sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{Rez}\ (f, z_k)$. Dacă $\sum\limits_{k=m+1}^{n+1} \mathbf{Rez}\ (f, z_k)$ e mai ușor de calculat atunci se simplifică metoda deoarece $\int\limits_{\gamma} f = -2\pi i \sum\limits_{k=m+1}^{n+1} \mathbf{Rez}\ (f, z_k)$ unde $z_{n+1} = \infty$.

5.5. *Exemple*. 1) $I = \int\limits_{\gamma} \frac{z+2}{z(z^2+4)^2}\, dz$ unde $\gamma = \delta U\ (0\,;\,3)$ se calculează conform (5.2) așa: $I = 2\pi i\ [\mathbf{Rez}\ (f, 0) + \mathbf{Rez}\ (f, 2i) + \mathbf{Rez}\ (f, -2i)]$ căci punctele singulare ale funcției $f(z) = \frac{z+2}{z(z^2+4)}$ sînt 0,2i, $-$ 2i. Aceștia sînt poli, 0 fiind de ordin întîi. Aplicăm (5.3) b) pentru $g(z) = \frac{z+2}{(z^2+4)^2}$, $h(z) = z$, deci $\mathbf{Rez}\ (f, 0) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{1}{8}$. În $z = 2i$ avem un pol de ordin doi și $\mathbf{Rez}\ (f, 2i) = \lim\limits_{z\to 2i} [(z-2i)^2 f(z)]' = -\frac{2+i}{32}$. Analog se calculează $\mathbf{Rez}\ (f, -2i) = \frac{-2+i}{32}$, deci $I = 2\pi i\left(\frac{1}{8} + \frac{-2-i-2+i}{32}\right) = 0$.

Acest rezultat se obține mai ușor din (5.4); dezvoltînd pe $f(z)$ în $V\ (0\,;2, +\infty)$ avem:

$$\frac{z+2}{z(z^2+4)^2} = \frac{z+2}{z^5}\left[\frac{1}{1+\frac{4}{z^2}}\right]^2 = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^5}\right)\left(1 - \frac{4}{z^2} + \frac{16}{z^4} - \ldots\right)^2$$

deoarece $\left|\frac{4}{z^2}\right| < 1$. Prin urmare, $f(z) = \ldots - \frac{16}{z^7} - \frac{8}{z^6} + \frac{2}{z^5} + \frac{1}{z^4}$ și $\mathbf{Rez}\ (f, \infty) = 0$, de unde $\mathbf{Rez}\ (f, 0) + \mathbf{Rez}\ (f, 2i) + \mathbf{Rez}\ (f, -2i) = -\mathbf{Rez}\ (f, \infty) = 0$ și $I = 0$.

2) $I_1 = \int\limits_{\delta U(0,1)} z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz$ se calculează dezvoltînd în jurul originii — căci $S(f) = \{0\}$ — pe $f(z)$. Avem: $f(z) = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \ldots\right) = \ldots \frac{1}{5!\,z^3} - \frac{1}{3!\,z} + z$ și $\mathbf{Rez}\ (f,0) = -\frac{1}{3!}$ iar $I_1 = -\frac{\pi i}{3}$.

§ 2. CALCULUL UNOR INTEGRALE DEFINITE CU AJUTORUL REZIDUURILOR

Teorema reziduurilor își găsește aplicație nu numai în calculul unor integrale din funcții complexe de variabilă complexă, dar și o serie de integrale definite ale unor funcții reale de variabilă reală pot fi calculate aplicînd aceeași teoremă unor funcții olomorfe alese convenabil. Precizăm că nu există o metodă generală pentru calculul integralelor definite reale cu metoda reziduurilor. Vom considera numai cîteva tipuri clasice (I—VIII) și vom indica pentru fiecare din ele procedeul practic de a reduce calculul integralelor definite reale la calculul unor reziduuri.

5.6. **Tipul I.** *Valoarea unei integrale de forma* $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, *unde* $(u, v) \mapsto R(u, v)$ *este o funcție rațională reală* (coeficienții polinoamelor de la numărătorul și numitorul funcției R sînt reali) *ce nu are poli pe cercul* $u^2 + v^2 = 1$, *este dată de formula*

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{R}(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{|z|<1} \mathbf{Rez}\,(\mathrm{g}, z)$$

unde funcția g este definită prin relația $\mathrm{g}(z) = \frac{1}{z}\,\mathrm{R}\left(\frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)$ și suma din membrul doi se referă la toți polii din discul $|z| < 1$ pentru funcția g.

Demonstrație. Fie γ drumul închis definit prin $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$, $t \in [0,1]$, atunci, aplicînd teorema reziduurilor pentru integrala $\int\limits_\gamma \mathrm{g}$ avem : $\int\limits_\gamma \mathrm{g}(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\ \mathrm{i} \sum \mathbf{Rez}\ (\mathrm{g}, |z| < 1)$. Pe de altă parte $\int\limits_\gamma \mathrm{g}(z)\ \mathrm{d}z = \int\limits_0^1 (\mathrm{g} \circ \gamma)\gamma'\,\mathrm{d}t =$

$$= \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t}\mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}, \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t}}{2}\right) 2\pi\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}\mathrm{d}t = 2\pi \mathrm{i}\int\limits_0^1 \mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t}}{2\,\mathrm{i}}, \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t}}{2}\right) \mathrm{d}t = i\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right) \mathrm{d}x = \mathrm{i}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{R}(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x,$$

după ce am notat $2\pi t$ cu x. Egalînd cele două valori obținute pentru $\int\limits_\gamma \mathrm{g}$, obținem formula căutată. □

Tipul I_1. $I_1^{(1)} = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{R}(\sin x, \cos x) \cos mx\,\mathrm{d}x$ și $I_1^{(2)} = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{R}\,(\sin x, \cos x) \sin mx\,\mathrm{d}x$ unde R este o funcție rațională cu proprietatea enunțată la integrale de tipul I și $m \in \mathrm{N}^*$, se integrează la fel ca cele de tip I calculînd, în cele două moduri, integralele $\int_{\gamma} g_1$ şi $\int_{\gamma} g_2$, unde g_1 şi g_2 sînt funcţiile definite prin relaţiile $g_1(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{z^m+z^{-m}}{2}$ şi $g_2(z)=\frac{1}{z} R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{z^m-z^{-m}}{2i}$ şi γ este drumul închis definit prin $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$ care are ca suport cercul unitate (centrat în 0 de rază 1).

Aceste integrale dau coeficienţii Fourier pentru funcţiile $x \to R(\sin x, \cos x)$.

Pentru calculul integralelor de tipurile II—VIII este necesar să dăm cîteva definiţii şi să precizăm unele leme, drumuri şi procedee ce vor fi utilizate.

5.7. **Definiţii.** Dacă $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă şi există $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx$ spunem că $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ este *convergentă în sens Cauchy*, limita se numeşte *valoarea principală Cauchy* a integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ se numeşte convergentă dacă există $\lim\limits_{r_1\to\infty} \int_{-r_1}^{0} f(x)\,dx$ şi $\lim\limits_{r_2\to\infty} \int_{0}^{r_2} f(x)\,dx$. În acest caz, prin definiţie, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{r_1\to\infty} \int_{-r_1}^{0} f(x)\,dx + \lim\limits_{r_2\to\infty} \int_{0}^{r_2} f(x)\,dx$. Evident, convergenţa integralei implică convergenţa la aceeaşi valoare în sensul lui Cauchy. Invers nu este adevărat. De exemplu $\int_{-r}^{r} 2x\,dx = x^2\Big|_{-r}^{r} = 0$ pe cînd $\int_{-r_1}^{r_2} 2x\,dx = r_2^2 - r_1^2$ nu are limită cînd r_1 şi r_2 tind la $+\infty$ în mod independent.

5.8. **Lemă.** *Fie* f *continuă în sectorul închis* $S_0[\theta_1, \theta_2]$ (vezi (1.35)) *iar* γ_r *drumul din acest sector definit de* $\gamma_r(t) = r \cdot e^{i[\theta_1 + t(\theta_2 - \theta_1)]}$.

A) *Dacă* $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$ *atunci* $\lim\limits_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f = 0$.

B) *Dacă* $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = 0$ *atunci* $\lim\limits_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f = 0$.

C) *Dacă* $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \frac{\pi}{p}$ și $\lim\limits_{z\to\infty} z^{1-p}\, f(z) = 0$ *atunci*

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\, e^{iz^p}\, dz = 0.$$

D) *Dacă* f *este olomorfă în sectorul* $S_0\ [\theta_1,\theta_2]\setminus\{0\}$, *iar* $z=0$ *este un pol simplu pentru* f, *atunci* $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_{\gamma_r} f = (\theta_2 - \theta_1)\, i\, \mathbf{Rez}\ (f, 0)$.

A) și B) rezultă din inegalitatea $\left|\int\limits_{\gamma_r} f\right| \leqslant M(r)\cdot r\,(\theta_2 - \theta_1)$ unde $M(r) = \mathbf{sup}\ \{|f(\gamma_r(t))|\,;\ t\in[0,1]\}$. În condițiile de la C) avem $\gamma_r'(r) = r\, i\frac{\pi}{p}\, e^{it\cdot\frac{\pi}{p}}$ și prin substituția $t \to \frac{p}{\pi}\, t$ obținem $\left|\int\limits_{\gamma_r} f(z)\, e^{iz^p}\, dz\right| \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{p}} f(r\cdot e^{it})\, e^{ir^p(\cos pt + i\sin pt)}\, ire^{it}\,\Big|\, dt \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{p}} |f(re^{it})|\, e^{-r^p\sin pt}\, r dt \leqslant rM\,(r)\int\limits_0^{\frac{\pi}{p}} e^{-r^p\sin pt}\, dt = 2\,\frac{r}{p}\, M(r)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r^p\sin\varphi}\, d\varphi$. Cum $1 \geqslant \frac{\sin\varphi}{\varphi} \geqslant \frac{2}{\pi}$ cînd $\varphi\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, urmează $\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r^p\sin\varphi}\, d\varphi \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} e^{-r^p\frac{2}{\pi}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2r^p}\, e^{-\frac{2r^p}{\pi}\varphi}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} \leqslant \frac{\pi}{2r^p}$, deci $\left|\int\limits_{\gamma_r} f(z)\, e^{iz}\, dz\right| \leqslant \frac{\pi M(r)}{pr^{p-1}} \to 0$ cînd $r\to\infty$.

Pentru demonstrarea lemei D) scriem dezvoltarea Laurent în jurul lui $z = 0$ care este, în ipotezele date, $f(z) = a_{-1}/z + a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ Deoarece $\int\limits_{\gamma_r} z^n\, dz \to 0$ cînd $r\to 0$ pentru $n\in\mathbb{N}^*$ urmează

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f = a_{-1}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z} = \mathbf{Rez}\ (f, 0)\, i\,(\theta_2 - \theta_1).\square$$

Observație. Lemele A—D rămîn valabile dacă se face o translație a originii într-un punct oarecare al planului complex. Binecunoscuta *lemă a lui Jordan* se obține din lema C) cînd luăm $p = 1$.

5.9. Drumurile închise $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$, folosite pentru calculul integralelor de tipurile II—VIII au suporturile din figurile 5. 9.

Aceste drumuri au descompuneri evidente: de exemplu: drumul γ_1 definit prin $\gamma_1(t) = \begin{cases} -r + 4rt & \text{dacă } t\in[0,1/2],\\ r\, e^{2\pi i(t-1/2)} & \text{dacă } t\in[1/2,1]\end{cases}$

se descompune în două drumuri λ_r și γ_r, adică $\gamma_1 = \lambda_r \cup \gamma_r$, unde λ_r este drumul liniar definit prin $\lambda_r(t) = -r + 2rt$, γ_r este drumul definit prin $\gamma_r(t) = re^{\pi i t}$ cu $t \in [0,1]$.

Se arată ușor că drumurile $\gamma_1 - \gamma_6$ sînt omotope cu zero în $\mathbf{C}$. Conform observației (5.2) teorema reziduurilor se scrie în fiecare caz ($k \in \overline{1,6}$), $\int_{\gamma_k} f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Rez}\,(f, b_j)$, unde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt punctele singulare ale lui f, interioare drumului închis γ_k. Evident drumul μ din γ_6 va fi convenabil ales pentru ca să nu treacă prin puncte singulare ale funcției de integrat astfel încît aportul său la integrală să fie zero, adică $\int_{\mu} f + \int_{\mu-} f = 0$.

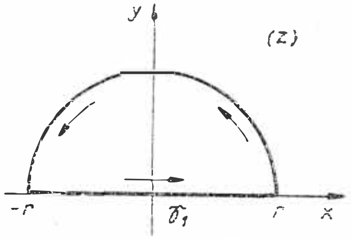
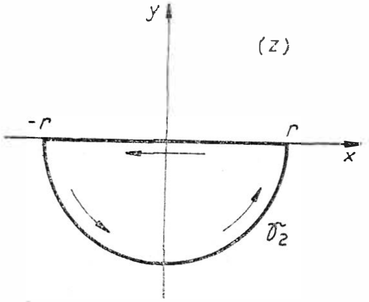

y
(z)
-r
γ_1
r
x

Fig. 5.9 a


y
(z)
-r
r
x
γ_2

Fgi. 5.9 b

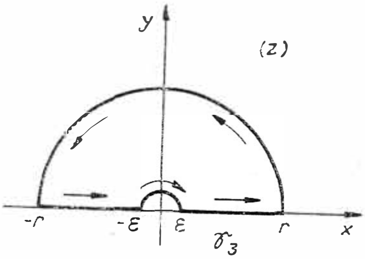

y
(z)
-r
-ε
ε
r
x
γ_3

Fig. 5.9 c

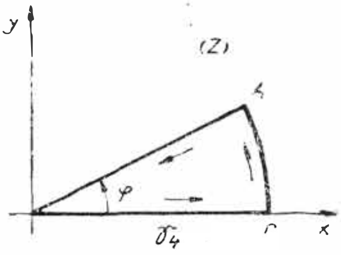

y
(Z)
φ
γ_4
r
x

Fig. 5.9 d

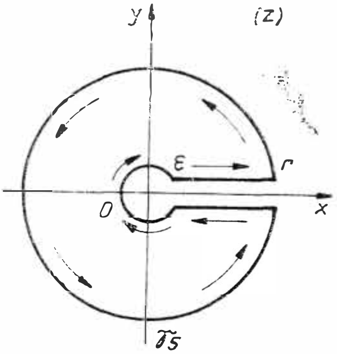

y
(z)
ε
r
O
x
γ_5

Fig. 5.9 e

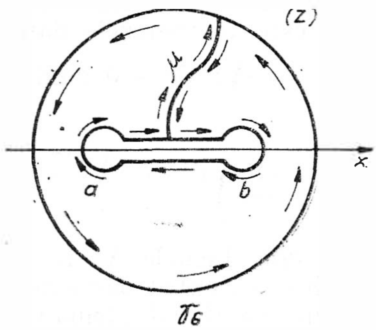

(z)
μ
a
b
x
γ_6

Fig. 5.9 f

5.10. *Procedeul general de calcul al integralelor reale de tipurile II—VIII.* După ce se cercetează convergența integralelor $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int^{\infty} f(x)dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$ etc. printr-un criteriu care diferă de la un tip de integrale la altul, se parcurg următoarele patru etape:

1) Se alege funcția de integrat și se află punctele ei singulare;

2) Se alege un contur de integrare și se calculează reziduurile relative la punctele singulare interioare conturului ales;

3) Se aplică teorema reziduurilor pentru conturul ales, descompus convenabil în drumuri mai simple în care să figureze drumuri pentru care să se poată aplica una din lemele A—D,

4) Se trece la limită pentru $r \to \infty$ și eventual și pentru $\varepsilon \to 0$. Astfel se obțin rezultatele generale pentru calculul integralelor considerate, adică calculul lor se reduce la calculul unor reziduuri, care numai în cazul unei funcții date se pot calcula.

5.11. **Tipul II.** *Dacă R este o funcție rațională reală $R = p/q$, unde p și q sînt polinoame de grad n respectiv m, q nu are zerouri pe axa reală și* $\lim\limits_{|z|\to\infty} z\mathrm{R}(z) = 0$ $(n \leqslant m-2)$, atunci $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}(x)\,dx = 2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}\,z>0} \mathbf{Rez}\ (\mathrm{R}, z)$ (factorul lui $2\pi i$ din membrul doi se citește „suma reziduurilor funcției R referitoare la toți polii din semiplanul superior”).

Demonstrație. Se consideră funcția g definită prin $g(z) = \mathrm{R}(z)$ și conturul de integrare γ_1 din (5.9) luînd r suficient de mare ca toți polii funcției R din semiplanul superior să intre în interiorul conturului γ_1. Se aplică teorema reziduurilor descompunînd γ_1 cum este dat în (5.9) și atunci

$$\int_{\gamma_1} g = \int_{-r}^{r} \mathrm{R}(x)\,dx + \int_{\gamma_r} \mathrm{R}(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,z>0} \mathbf{Rez}\,(\mathrm{R}, z).$$

Trecînd la limită pentru $r \to \infty$, $\int_{-r}^{r} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}(x)\,dx$ (pentru că integrala converge în sensul general prin criteriul în α) și $\int_{\gamma_r} \mathrm{R}(z)\,dx \to 0$ prin lema A) se obține rezultatul enunțat. □

Observație. Dacă în condițiile impuse, alegem drumul γ_2 din (5.9), obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,z<0} \mathbf{Rez}\,(\mathrm{R}, z).$$

Integrala se calculează prin una din cele două formule care permite un calcul mai rapid al reziduurilor din membrul doi.

5.12. **Tipul III.** *Dacă* R *este o funcție rațională reală de forma* p/q, *unde* p *și* q *sînt polinoame,* q *nu are zerouri pe axa reală și* $\lim\limits_{|z|\to\infty} R(x) = 0$ $(n \leqslant m-1)$ *atunci* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{ix}\, dx$ *converge și* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im} z>0} \mathbf{Rez}\,(g, z)$, *unde g este definită prin* $g(z) = R(z)e^{iz}$.

Demonstrație. Pentru $\xi,\ \eta > 0$

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} R(x)\, e^{ix}\, dx = \int\limits_{\xi}^{\eta} R(x) \cos x\, dx + i \int\limits_{\xi}^{\eta} R(x) \sin x\, dx.$$

Aplicînd teorema a doua a mediei (forma lui Weierstrass) din calculul integral (pentru ξ, η suficient de mari, pentru ca R să fie monotonă în intervalul $[\xi, \eta]$) integralelor reale din membrul al doilea) există $\xi_1, \xi_2 \in\ ]\xi, \eta[$ astfel încît

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} R(x)\, e^{ix}\, dx = R(\xi) \int\limits_{\xi}^{\xi_1} \cos x dx + R(\eta) \int\limits_{\xi_1}^{\eta} \cos x dx +$$

$$+ i \left[R(\xi) \int\limits_{\xi}^{\xi_2} \sin x dx + R(\eta) \int\limits_{\xi_2}^{\eta} \sin x dx \right].$$

Integralele din membrul al doilea sînt mărginite în modul de 2. În adevăr, pentru prima integrală avem

$$\int\limits_{\xi}^{\xi_1} \cos x dx = \sin x \Big|_{\xi}^{\xi_1} = \sin \xi_1 - \sin \xi \text{ și deci } \left| \int\limits_{\xi}^{\xi_1} \cos x dx \right| \leqslant 2.$$

La fel se verifică rezultatul enunțat pentru celelalte integrale. Pe de altă parte, $R(\xi)$, $R(\eta)$ tind monoton la zero pentru $\xi, \eta \to \infty$. Rezultă că $\int\limits_{0}^{+\infty} R(x)\, e^{ix}\, dx$ converge. La fel se arată că $\int\limits_{-\infty}^{0} R(x)\, e^{ix}\, dx$ converge și, prin urmare $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{ix}\, dx$ este convergentă. Pentru calculul acestei integrale se utilizează funcția g dată în enunț, se aplică teorema reziduurilor descompunînd γ_1 în cele două drumuri indicate în (5.9) și se trece la limită pentru $r \to \infty$, aplicîndu-se lema C (cazul $n = 1$). Astfel se obțin proprietățile din enunț. □

Pentru calculul integralelor $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{-ix}\, dx$ se procedează analog folosind conturul γ_2 din 5.9.

Observație. Dacă $R(z) = p(z)/zq(z)$, unde q nu are zerouri pe axa reală și $\lim\limits_{|z|\to\infty} R(z) = 0$, atunci $\int\limits_0^\infty \left[\frac{p(x)}{q(x)} e^{i} - \frac{p(-x)}{q(-x)} e^{-ix}\right] \frac{dx}{x} =$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2}\frac{p(0)}{q(0)} + \sum_{\mathrm{Im}z>0} \mathbf{Rez}\,(R, z)\right].$$

Demonstrație. Se consideră funcția g definită prin $g(z) = p(z)\,e^{iz}/q(z)$, drumul γ_3 din (5.9) și se aplică teorema reziduurilor cu descompunerea evidentă a lui γ_3. Avem

$$\int\limits_{\gamma_3} g = \int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ix} \frac{dx}{x} - \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} \frac{dz}{z} + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ix} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\gamma_r} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iz} \frac{dz}{z} =$$

$$= 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z>0} \mathbf{Rez}\,(g, z).$$

Integrala a doua tinde la zero prin lema B), integrala a patra tinde la πi **Rez** $(g, 0) = \pi i\, p(0)/q(0)$ prin lema D). Schimbînd x în $-x$ în integrala întîia și trecînd la limită pentru $\varepsilon \to 0$ și $r \to \infty$, obținem rezultatul enunțat. ☐

Consecință. Dacă în plus, polinoamele p și q din observație sînt funcții de x^2 și $p(x^2)/q(x^2) = 1$ obținem valoarea *integralei lui Poisson*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Generalizare. Dacă f este meromorfă pe **C**, are un număr finit de poli care nu sînt pe axa reală, există o constantă K așa ca $|f(z)| \leqslant K|z|$ pentru toate numerele z cu $|z|$ suficient de mare și $a > 0$, atunci

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z>0} \mathbf{Rez}\,(g, z).$$

Demonstrația se face ca la primul tip III, unde g este definită prin $g(z) = f(z)\, e^{iaz}$ și se ia conturul γ_1 din (5.9). Integralele din membrul întîi se numesc *transformări Fourier*. Procedeul general folosit dă evaluările lor.

5.13. **Tipul IV.** *Integralele lui Fresnel*: $\int\limits_0^\infty \cos x^2\, dx = \int\limits_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Să considerăm funcția $g : z \to e^{iz^2}$ care este în $\mathscr{H}(\mathbf{C})$ și să alegem conturul γ_4 din (5.9) cu $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Atunci $\int\limits_0^r e^{ix^2}\, dx + \int\limits_{\gamma_r} e^{iz^2}\, dz + \int\limits_{\overrightarrow{A_0}} e^{iz^2}\, dx = 0.$

Deoarece $\int\limits_{\gamma_r} g \to 0$ cînd $r \to \infty$ prin lema C) pentru $p = 2$ și drumul liniar λ_r cu punctele z_1 și z_2 egale cu A și 0 este definit prin $\lambda_r(t) = -te^{i\frac{\pi}{4}}$, făcînd $t \to \infty$, obținem

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-t^2} e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

După cum se știe $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ și urmează $\int\limits_0^\infty (\cos x^2 + i \sin x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ceea ce dă, prin egalarea porților reale și a celor imaginare, rezultatul enunțat. □

Aplicînd același procedeu se pot calcula integrale reale aplicînd teorema reziduurilor funcțiilor $z \to R(z)\,e^{iz}$, unde R este funcție rațională reală cu $n-m \leqslant p-2, \gamma=\gamma_4$ cu $\varphi = \frac{\pi}{2p}$ și alte condiții evidente.

Pentru o aplicație multivocă $F : \mathbf{C} \to \mathcal{P}(\mathbf{C})$, teorema reziduurilor se aplică oricărei ramuri uniforme ale acestei aplicații F, pentru orice contur închis γ în care *funcția multiformă F* este funcție uniformă și nu are în interiorul acestui contur decît poli sau puncte singulare esențiale izolate.

Ca aplicații dăm procedee de calcul pentru integralele de tipurile V—VIII.

5.14. **Tipul V.** *Dacă* R *este o funcție rațională reală de forma* p/q, *unde* p *și* q *sînt polinoame*, q *nu are zerouri pe semiaxa reală și* $\lim\limits_{|z|\to\infty} z\,R(z) = 0$ $(n \leqslant m-2)$, *atunci* $\int\limits_0^\infty R(x)\,dx$ *converge și* $\int\limits_0^\infty R(x)dx = -\sum\limits_{z\in \mathbf{C}^*} \mathbf{Rez}\,(g, z)$, *unde* g *este funcția* $g(z) = \frac{p(z)}{q(z)}\log z$.

Convergența integralei este asigurată cu condiția $n\leqslant m-2$. Alegînd γ_5 din (5.9) cu r suficient de mare și ε suficient de mic și parcurgînd primele trei etape de calcul din (5.10) obținem

$$\int_\varepsilon^r \frac{p(x)}{q(x)} \log x\,dx + \int_{\gamma_r} \frac{p(z)}{q(z)} \log z\,dz + \int_r^\varepsilon \frac{p(x)}{q(x)} [\log x + 2\pi i]\,dx -$$

$$-\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{p(z)}{q(z)} \log z\,dz = \int_{\gamma_r} \frac{p(z)}{q(z)} \log z\,dz = 2\pi i \sum_{z\in \mathbf{C}^*} \mathbf{Rez}(g, z).$$

Deoarece $|zg(z)|_{\gamma_r} \leqslant \frac{rM_1}{r^2}(\log \gamma + 0) \to 0$ cînd $r \to \infty$, urmează că $\int\limits_{\gamma_r} \to 0$ cînd $r \to \infty$ prin lema A.

Deoarece $|zg(z)|_{\gamma_\varepsilon} \leqslant \varepsilon M_2 [\log \varepsilon + \theta] \to 0$ cînd $\varepsilon \to 0$, urmează că $\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \to 0$ pentru $\varepsilon \to 0$ prin lema B).

Aplicînd etapa a patra a calculului unei integrale, menționată în (5.10) și simplificînd prin $2\pi i$ obținem rezultatul din enunț pentru ramura aplicației multivoce (funcției multiforme) Log dată de $\log z = \log |z| + i\theta$ cu $\theta \in [0,2\pi]$. □

Observație importantă. Calculul integralelor $\int\limits_a^b \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, unde q nu are zerouri pe intervalul $[a, b]$ se reduce la calculul integralelor de tipul V prin schimbarea de variabilă dată de funcția omografică $x = (bt + a)/(t + 1)$.

5.15. **Tipul VI.** Calculul integralelor de forma $\int\limits_0^\infty R(x) \log x\,dx$ cu condițiile ca $n \leqslant m-2$ ($\lim\limits_{|z|\to\infty} z\,R(z) = 0$) și R o funcție rațională reală fără poli pe semiaxa reală pozitivă.

Condiția $n \leqslant m-2$ asigură convergența integralei. Se alege funcția g definită prin $g(z) = R(z)\,(\log z)^2$ și drumul γ_5 din (5.9). Integralele $\int\limits_{\gamma_r}$ și $\int\limits_{\gamma_\varepsilon}$ tind la zero cînd r tinde către ∞ și ε către 0 din lemele A) și B). Cînd argumentul lui z este 2π, avem $\log z = \log |z| + 2\pi i$. Se obține

$$\int\limits_0^\infty R(x)\,(\log\ x)^2\,dx - \int\limits_0^\infty R(x)\,[\log x + 2\pi i]^2\,dx = 2\pi i \sum_{z\in C^*} \mathbf{Rez}\,(g, z)$$

sau separînd partea reală de cea imaginară avem egalitățile:

$$\int\limits_0^\infty R(x)\log\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathbf{Re}\,[\sum_{z\in C^*} \mathbf{Rez}\,(g, z)]\ \text{și}$$

$$\int\limits_0^\infty R(x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\,\mathbf{Im}\,[\sum_{z\in C^*} \mathbf{Rez}\,(g, z)].\ \square$$

5.16. **Tipul VII.** Să considerăm integralele de forma $I = \int\limits_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx$, unde $\alpha \in\,]0,1[$ și R este o funcție rațională reală p/q, p și q polinoame cu $n \leqslant m-1$ ($\lim\limits_{z\to\infty} R(z) = 0$) și q nu are zerouri pe seamiaxa reală pozitivă.

Luînd g definită pe C* prin g $(z) = \mathrm{R}(z)/z^\alpha$, conturul de integrare γ_5 din (5.9) descompus convenabil şi aplicînd teorema reziduurilor, avem $\int_{\gamma_5} \frac{\mathrm{R}(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{R}(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{R}(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}z + (1 - \mathrm{e}^{-2\alpha\pi\mathrm{i}}) \int_\varepsilon^r \frac{\mathrm{R}(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x =$ $= 2\pi\mathrm{i} \sum_{z\in\mathbf{C}^*} \mathbf{Rez}\,(\mathrm{g}, z)$ deoarece, cînd argumentul lui z este egal cu $2\pi\; z^\alpha =$ $= \mathrm{e}^{2\alpha\pi\mathrm{i}}\, x^\alpha$. Cum $\int_{\gamma_r}$ şi $\int_{\gamma_\varepsilon} \to 0$ cînd $r \to \infty$ şi $\varepsilon \to 0$ prin lemele A) şi B), urmează $(1 - \mathrm{e}^{-2\alpha\pi\mathrm{i}})\; I = 2\pi\mathrm{i} \sum_{z\in\mathbf{C}^*} \mathbf{Rez}\,(\mathrm{g}, z)$, sau $I = \frac{\pi \mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}}{\sin \alpha\pi} \sum_{z\in\mathbf{C}^*} \mathbf{Rez}\,(\mathrm{g}, z)$.

Propoziţie. *Dacă* $a \notin \mathbf{Z}$, f *este olomorfă pe* $\mathbf{C}$ *cu excepţia unui număr finit de poli care nu se află pe axa reală pozitivă, atunci*

$$\int_0^\infty \mathrm{f}(x) x^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{e}^{-a\pi\mathrm{i}}}{\sin a\pi} \sum_{z\in\mathbf{C}^*} \mathbf{Rez}\,(\mathrm{g}, z),$$

unde g *este definită prin* $g(z) = f(z)\, z^{a-1}$. Demonstraţia se dă ca la tipul VII. Integralele de acest tip se numesc *transformări Mellin* privite ca funcţii de a: se notează $\mathscr{M}$f în punctul $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$.

În rest dăm unele informaţii referitoare la integralele de tipul VII: $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^z \frac{\mathrm{d}t}{t}$ definită pe semiplanul drept defineşte o transformare Mellin. Scriem $\mathrm{d}t/t$ din cauză că această expresie este invariantă la „translaţii multiplicative", adică pentru orice funcţie care este absolut integrabilă pentru $t \in]0, \infty[$ şi a un număr pozitiv, avem $\int_0^\infty \mathrm{f}(at) \frac{\mathrm{d}t}{t} =$ $= \int_0^\infty \mathrm{f}(t) \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Înlocuind t cu nt în formula care defineşte funcţia Γ cu $n \in \mathbf{N}^*$, obţinem

$$\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nt}\, t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ pentru } \mathbf{Re}(s) > 0.$$

Sumînd după n obţinem în membrul întîi *funcţia zeta a lui Riemann* de variabile complexă s.

În legătură cu aceleaşi integrale improprii dăm următoarea:

Definiţie. Dacă f este continuă pe $[0, \infty[$, există constantele A şi B astfel încît $|\mathrm{f}(t)| \leqslant A\mathrm{e}^{Bt}$ pentru toţi t suficient de mari, atunci $Lf\,(z) =$ $= \int_0^\infty \mathrm{f}(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, \mathrm{d}t$ este olomorfă într-un semiplan $\mathbf{Re}\, z > \sigma$. $\{\mathbf{inf}\ \sigma\,;\, Lf\ (z)$ converge$\} = \sigma_0$ se numeşte *abscisa de convergenţă a integralei* şi Lf este olomorfă pe $\mathbf{Re}\, z > \sigma_0$ şi integrala converge absolut pe $\mathbf{Re}\, z > \sigma_0 + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Funcţia Lf se numeşte *transformata Laplace a funcţiei* f.

5.17. **Tipul VIII.** Să considerăm integrala $I = \int_a^b \frac{p(x)}{q(x)} \frac{dx}{(x-a)^\alpha(b-x)^\beta}$, unde p și q sînt polinoame, q nu are zerouri pe segmentul $[a, b]$, $\alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$.

Procedînd ca în cazul precedent, alegînd funcția g definită pe $\mathbf{C} \setminus [a, b]$ prin $g(z) = R(z)/(z-a)^\alpha(b-z)^\beta$, conturul de integrare γ_6 din (5.9) descompus convenabil, cum $\int_\mu = -\int_{\mu-}$ și $\int_{\gamma_\varepsilon(a)}$, $\int_{\gamma_\varepsilon(b)}$ și $\int_{\gamma_r} \to 0$ prin lemele B) și A), ținînd cont că ramura funcției se schimbă cînd se înconjoară unul din punctele a sau b și procedînd ca la tipul precedent avem rezultatul final:

$$I = \frac{\pi\, e^{\alpha\pi i}}{\sin \alpha\pi} \Big(\sum_{z \in \complement\{a,b\}} \text{Rez}\,(g, z). \square$$

5.18. *Alte aplicații ale teoremei reziduurilor.*

1) Să se calculeze $\frac{1}{2\pi i} \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{isz}}{z}\, dz$, unde $\gamma_r = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ cu $\gamma_1(t) = -r + t\,(r-1)$, $\gamma_2(t) = e^{i(t+1)\pi}$, $\gamma_3(t) = 1 + t\,(r-1)$, $t \in [0,1]$ și $s \in \mathbf{R}$.

Soluție. Suportul drumului γ_r are forma din figura (5.18.1). Pentru $s = 0$

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = \int_{-r}^{-1} \frac{dx}{x} + \int_{-1}^{1} i\pi \frac{e^{i(t+1)}}{e^{i(t+1)}} dt + \int_1^r \frac{dx}{x} = \int_r^1 \frac{dx}{x} + i\,\pi \int_0^1 dt + \int_1^r \frac{dx}{x} = \pi i \text{ și } \frac{1}{2\pi i} \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}.$$

Pentru a calcula limita din enunț pentru $s > 0$, compunem drumul γ_r cu $\overline{\gamma}_r$ definit de $\overline{\gamma}_r(t) = re^{\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Drumul $\overline{\gamma} = \gamma_r \cup \overline{\gamma}_r$ este un drum închis cu suportul $\{\overline{\gamma}\}$. Aplicînd teorema reziduurilor și observînd că **Rez** $(g,0) = \left[\frac{e^{isz}}{1}\right]_{z=0} = 1$, obținem $\int_{\gamma_r} \frac{e^{isz}}{z}\, dz + \int_{\overline{\gamma}_r} \frac{e^{isz}}{z}\, dz = 2\pi i$ ultima integrală, conform lemei C), tinde la zero cînd r tinde la infinit și deci $\frac{1}{2\pi i} \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{isz}}{z} dz = 1$ pentru $s > 0$.

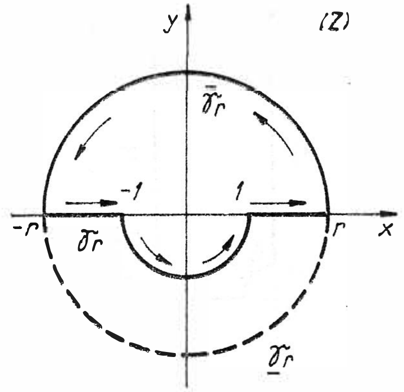


Fig. 5.18.1

Ca și la integralele de tipul III pentru $s < 0$ trebuie să compunem γ_r^- cu $\underline{\gamma}_r$ definit de $\underline{\gamma}_r(t) = re^{i(t+1)\pi}$ pe $t \in [0,1]$. Deoarece funcția e^{isz}/z nu are puncte singulare în domeniul mărginit de drumul închis $\gamma = \gamma_r^- \cup \gamma_r$, urmează din teorema lui Cauchy că $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{isz}}{z} dz = 0$, deci $\frac{1}{2\pi i} \lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma r} \frac{e^{isz}}{z} dz = 0$.

Prin urmare, limita din enunţ este o funcţie reală $f: \mathbf{R} \to \{0, 1/2, 1\}$ definită prin

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } s < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } s = 0, \\ 1 & \text{dacă } s > 0. \square \end{cases}$$

Observaţie. Se vede imediat că funcţia $\operatorname{sign}: \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}$ se defineşte prin $\operatorname{sign} s = -1 + \frac{1}{\pi i} \lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_r} \frac{e^{isz}}{z} dz$

sau

$$\operatorname{sign} s = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r\to\infty} \left[\int\limits_{\gamma_r} \frac{e^{isz}}{z} dz - \int\limits_{\gamma_r} \frac{e^{-isz}}{z} dz \right].$$

Exerciţiu. Să se calculeze integrala $\int_0^{\pi} \log(\sin x)\, dx$. Să considerăm funcţia $z \mapsto (1 - e^{2iz}) = -2ie^{iz} \sin z$. Egalitatea se verifică imediat folosind formula lui Euler pentru $\sin z$. Din egalitatea $1 - e^{2iz} = 1 - e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x)$ rezultă că această funcţie este reală şi negativă pentru $x = k\pi$, $y \leqslant 0$ $(k \in \mathbf{Z})$. În domeniul obţinut prin excluderea acestor semidrepte $\log(1 - e^{2iz})$ este uniformă şi olomorfă. Aplicăm teorema lui Cauchy (caz particular al teoremei reziduurilor) dreptunghiului din figura (5.18.2).

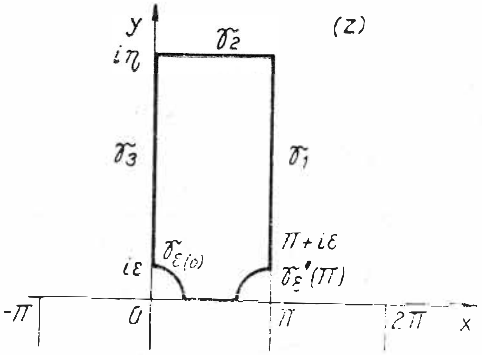


Fig. 5.18.2

Integralele $\int\limits_{\gamma_1} \log(1 - e^{2iz})\, dz = -\int\limits_{\gamma_3} \log(1 - e^{2iz})\, dz$ pentru că e^{2iz} este periodică de perioadă π. $\left| \int\limits_{\gamma_2} \log(1 - e^{2iz})\, dz \right| \leqslant \pi \log(1 + e^{-4\eta} + 2^{-2\eta}) \to 0$ cînd $\eta \to \infty$ $(x \in [0, 2\pi])$. Pentru a aplica lema B) drumurilor $\gamma_\varepsilon(0)$ şi $\gamma_\varepsilon(\pi)$ trebuie să arătăm că $\lim\limits_{|z|\to\infty} z f(z) = 0$ $\lim\limits_{|z|\to\pi} (z - \pi) f(z) = 0$. Vom demonstra prima relaţie. Pentru aceasta considerăm $|z| \left| \log \frac{|1 - e^{2iz}|}{|z|} + i \arg(1 - e^{2iz}) \right| \leqslant |z| \left\{ \log |-2i| + \log |z| + \frac{\pi}{2} \right\}$ deoarece $\left| \frac{1 - e^{2iz}}{z} \right| \to$

$\rightarrow |(1-e^{2iz})_{z=0}| = 2ie^{2iz}|_{z=0} = 2$. Evident pentru a demonstra că $|z|\,|f(z)| \rightarrow 0$ cînd $\varepsilon \rightarrow 0$ trebuie să arătăm că $\varepsilon \log \varepsilon \rightarrow 0$ cînd $\varepsilon \rightarrow 0$. Aplicînd regula lui l'Hôpital pentru $\log \varepsilon / \frac{1}{\varepsilon}$ avem $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon) = 0$.

În acelaşi fel se aplică lema B) pentru $\gamma_\varepsilon(\pi)$. Trecînd la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ şi $\eta \rightarrow \infty$, obţinem

$$\int_0^\pi \log(-2ie^{ix}\sin x)\,dx = 0.$$

Dacă alegem $\log e^{ix} = ix$, partea imaginară se află între 0 şi π. Deci pentru a obţine ramura principală cu o parte imaginară între $-\pi$ şi π, trebuie să alegem $\log(-i) = -\frac{\pi}{2}i$. Ecuaţia poate fi scrisă în forma

$$\int_0^\pi \log 2\,dx + \int_0^\pi \log(-i)\,dx + \int_0^\pi i x\,dx + \int_0^\pi \log\ \sin\ x\,dx = 0 \quad \text{sau}$$

$\pi\ \log\ 2 - \frac{\pi}{2} i . \pi + i\frac{\pi^2}{2} + \int_0^\pi \log \sin x\,dx = 0$. De aici urmează

$\int_0^\pi \log \sin\ x\,dx = -\pi\ \log\ 2$. De asemenea avem $\int_0^{2\pi} \log \sin^2 2x\,dx =$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \log\ \sin^2\ 2x\ dx = 4\int_0^\pi \log \sin x\ dx = -4\pi \log 2.$$

3) *Aplicaţia teoremei reziduurilor la sumarea unor serii.* Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$ unde $a \in \mathbf{C}$ şi $a \notin \mathbf{Z}$. Se consideră funcţia $z \mapsto f(z) = \frac{1}{(a+z)^2}$. Cum se vede $f \in \mathscr{H}(\mathbf{C} \setminus \{-a\})$ şi $z = -a$ este pol de ordin doi. Luînd drept drumul γ_n închis cu suportul pătratul cu vîrfurile $\left(n + \frac{1}{2}\right)(n = \pm 1 \pm i)$ şi aplicînd teorema reziduurilor $\int\limits_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{(a+z)^2}\,dx =$

$= 2\pi i\left(\sum\limits_{k=-n}^{n} \frac{1}{(a+z)^2} + \mathbf{Rez}\ (g, a)\right)$, unde g este definită prin $z \mapsto g(z) =$
$= \pi \operatorname{ctg}\pi z \frac{1}{(a+k)^2}$ deoarece $\operatorname{ctg}\pi z = \operatorname{ctg}(-\pi a) + (\pi z + \pi a)[-\operatorname{cosec}^2(-\pi a) + \ldots]$ şi deci reziduul funcţiei $z \mapsto g(z)$ relativ la punctul $z = -a$ este egal cu $-\pi \operatorname{cosec}^2 a\pi$ şi $\mathbf{Rez}\ (g, k) = \left[\frac{1}{(a+z)^2} \frac{\pi\cos\pi z}{\pi\cos\pi z}\right]_{z=k} = \frac{1}{(a+k)^2}$. Observînd că $\int\limits_{\gamma_n} \rightarrow 0$ cînd $n \rightarrow \infty$, atunci $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 a\pi$.

§ 3. STUDIUL FUNCȚIILOR MEROMORFE CU AJUTORUL REZIDUURILOR

Dintre aplicațiile teoremei reziduurilor vom prezenta aici unele proprietăți ale funcțiilor meromorfe.

5.19. **Definiție.** Fie f o funcție meromorfă pe mulțimea $\widetilde{G}$ și $z_0 \in \widetilde{G}$. Vom spune că f(z) e *divizibilă* cu $(z-z_0)^n$ dacă există $r \in \mathbf{R}_+^*$ și $g \in \mathscr{H}(U(z_0\,;\,r))$ pentru care $f(z) = g(z)\,(z-z_0)^n$ oricare ar fi $z \in \dot{U}\,(z_0, r)$. Prin *ordinul lui* f *în* z_0 — notat cu $\theta\,(f, z_0)$ — înțelegem cel mai mare număr *întreg* n pentru care f(z) e divizibil prin $(z-z_0)^n$. Dacă $D \subset \widetilde{G}$ și $\sum\limits_{z\in D} \theta(f, z)$ e o sumă finită, atunci aceasta se notează cu $\theta\,(f, D)$ și e *ordinul lui* f *pe* D.

5.20. *Exemple.* 1) Fie $f(z) = \sin^2 z$ și $z_0 = 0$, atunci $\theta(f, 0) = 2$ deoarece definind

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 z}{z^2} & \text{dacă } z \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } z = 0 \end{cases}$$

avem $g \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$ și pentru orice $z \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ avem $f(z) = g(z)\cdot z^2$ dar f nu e divizibilă prin z^3 căci în caz contrar din $f(z) = g_1(z)\cdot z^3$ am deduce $g_1(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^3}$ într-o vecinătate punctată $z \in \dot{U}\,(0, r)$. Dar $\lim\limits_{z\to 0} g_1(z)$ nu e finită, deci g_1 nu va fi olomorfă în nici un $U\,(0\,;\,r)$.

2) Mai general, dacă z_0 e un punct regular al funcției f și dezvoltînd în serie Taylor obținem $f(z) = (z-z_0)^n \cdot (a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \ldots)$ și $a_n \neq 0$, adică $f(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ atunci $\theta(f, z_0) = n$.

Definiția ordinului într-un punct generalizează noțiunea de ordinul de multiplicitate al rădăcinii unui *polinom* întîlnită în liceu.

3) Dacă z_0 e un pol de ordin n, atunci

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \ldots$$

pentru orice $z \in \dot{U}(z_0, r)$ și $a_{-n} \neq 0$. Atunci $f(z) = (z-z_0)^{-n}\,g(z)$ unde $g(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \ldots$ Deci f(z) e divizibilă prin $(z-z_0)^{-n}$ și $-n$ e cea mai mare putere cu această proprietate. Prin urmare $\theta(f, z_0) = -n$.

4) Dacă z_0 e un punct regular, dar $f(z_0) \neq 0$, atunci $\theta(f, z_0) = 0$

5) Din 2), 3) și 4) rezultă că ordinul lui f în z_0 este n, atunci și numai atunci cînd într-o vecinătate punctată a lui z_0 avem $f(z) = (z-z_0)^n\,(a_n + a_{n+1}\,(z-z_0) + \ldots)$ unde seria are o rază de convergență pozitivă și $a_n \neq 0$.

6) P(z) fiind un polinom de grad n rezultă $\theta(P, \mathbf{C}) = n$ și această proprietate e echivalentă cu teorema fundamentală a algebrei.

7) Din 5) se deduce ușor că $\theta\,(f\cdot g, z_0) = \theta\,(f, z_0) + \theta(g, z_0)\,;\,\theta\,\,(f : g, z_0) = \theta(f, z_0) - \theta\,(g, z_0)$, iar dacă $\theta(f, D)$ și $\theta(g, D)$ există, atunci $\theta(\,f\cdot g, D)$ e suma lor, iar $\theta\,(f : g,\ D)$ e egală cu diferența lor.

8) $\theta(f, D) = \sum_{z\in D} \theta(f, z)$ este diferența dintre *numărul N* de zerouri și numărul P al polilor funcției f în D, dacă se numără fiecare zero respectiv pol de atîtea ori, cît e ordinul lor de multiplicitate. În mod analog $\sum_{z\in D} z\cdot\theta(f, z)$ — dacă e o sumă finită — reprezintă diferența dintre *suma* zerourilor și suma polilor cu convenția de mai sus.

5.21. **Teorema lui Cauchy privind zerourile și polii.** *Fie* f *o funcție meromorfă pe mulțimea deschisă* $\tilde G$, *neidentic nulă,* g *o funcție olomorfă pe* $\tilde G$, γ *un contur omotop cu zero în* $\tilde G$ *ce nu trece prin nici un zero sau pol al lui* f. *Atunci suma*

$$\sum_{z\in\tilde G} g(z)\cdot\theta(f, z)\cdot n(\gamma, z) \text{ e finită și}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g\frac{f'}{f} = \sum_{z\in\tilde G} g(z)\cdot\theta(f, z)\cdot n(\gamma, z)$$

Demonstrație. Funcția $h = g\cdot\dfrac{f'}{f}$ e meromorfă în $\tilde G$ și mulțimea $S = S(h)$ a punctelor ei singulare izolate coincide cu $A \cup B$ unde A mulțimea zerourilor lui f, B mulțimea polilor lui f. Dacă $G = \tilde G\setminus S$ atunci h e olomorfă pe mulțimea deschisă G și putem aplica teorema reziduurilor deoarece γ e un contur din G:

$$\int_\gamma g\frac{f'}{f} = \int_\gamma h = 2\pi i\sum_{z\in\tilde G} \mathbf{Rez}\,(h, z)\cdot n(\gamma, z)$$

și această sumă e finită. Reziduul lui h diferă de 0 numai în punctele din S. Fie $z_0 \in A \cup B$, deci $k = \theta(f, z_0) \neq 0$. $f(z)$ fiind divizibilă cu $(z-z_0)^k$ va exista o vecinătate deschisă V a lui z_0 și $f_1 \in \mathscr{H}(V)$ astfel încît pentru orice $z \in \dot V$ să avem $f(z) = (z-z_0)^k\cdot f_1(z)$ și $f_1(z_0) \neq 0$. Atunci $f'(z) = k(z-z_0)^{k-1}f_1(z) + (z-z_0)^k f_1'(z)$ și

$$h(z) = g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k\cdot g(z)}{z-z_0} + \frac{g(z)\cdot f_1'(z)}{f_1(z)}$$

Ultimul termen fiind olomorf într-un disc $U(z_0; r)$, reziduul lui h în z_0 va fi $k\cdot g(z_0)$, deci

$$\int_\gamma g\frac{f'}{f} = 2\pi i\sum_{z\in\tilde G} g(z)\cdot\theta(f, z)\cdot n(\gamma, z)$$

și această sumă e finită. ☐

Particularizînd teorema pentru un contur circular și alegînd $g = 1$, obținem:

5.22. **Corolar.** *Fie* f *o funcție meromorfă pe* $\tilde G$ *neidentic nulă iar* $D = U(z_0; r)$ *un disc a cărei frontieră nu conține zerouri și poli ai lui* f, $\overline{D} \subset \tilde G$. *Atunci,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_D}\frac{f'}{f} = \theta(f, D).$$

5.23. *Observație.* 1) Corolarul precedent ne permite să calculăm cu ajutorul unei integrale ordinul lui f în D. Acest rezultat e de mare importanță în algebră, deoarece pentru o funcție olomorfă acest ordin reprezintă numărul zerourilor lui f (adică al rădăcinilor ecuației $f = 0$). Teorema lui Rouché ne va furniza o altă metodă utilă pentru determinarea zerourilor.

2) Dacă $w_0 \in \mathbf{C}$, atunci $\theta(f - \mathbf{w}_0, D)$ pentru o funcție olomorfă f reprezintă numărul rădăcinilor ecuației $f(z) - w_0 = 0$ în D, adică numărul punctelor z_0 în care are loc $f(z_0) = w_0$ cu convenția că z_0 trebuie considerat cu ponderea k dacă $f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ și $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Din corolar rezultă că $\theta\,(f - \mathbf{w}_0,\ U\,(z_0\,;r)) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\delta U} \frac{f'}{f - \mathbf{w}_0}$.

5.24. **Teorema variației argumentului.** *Fie* f *o funcție meromorfă pe* $\widetilde{G}$ *și neconstantă,* γ *un drum din* $\widetilde{G}$*, neted pe porțiuni și care nu trece prin nici un pol al lui* f *iar* $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$. *Definim funcția* $I : \mathbf{C} \setminus \{\hat{\gamma}\} \to \mathbf{C}$ *astfel*:

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f - w}$$

În aceste condiții avem:

a) $I(w) = n(\hat{\gamma}, w)$

b) *Dacă* $\hat{\gamma}$ e *un drum închis,* I *e local constantă, cu valori întregi.*

c) *Dacă* $D = U\,(z_0\,; r)$, $\gamma = \delta D$, $\bar{D} \subset \widetilde{G}$ *atunci* $I(w) = n(\hat{\gamma}, w) = \theta\,(f - \mathbf{w},\ D)$.

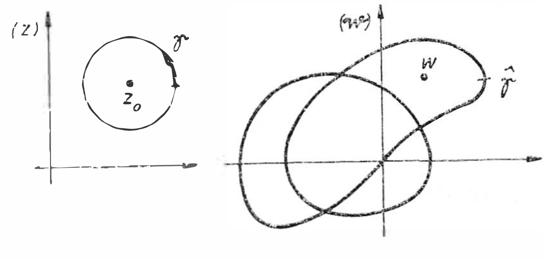


Fig. 5.24

Demonstrație. a) Putem presupune că γ are derivată continuă. Atunci și $\hat{\gamma}$, ca funcție compusă, are derivată continuă pe $[0,1]$ și $\hat{\gamma}'(t) = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ și $\hat{\gamma}$ va fi rectificabilă. Prin urmare $n\ (\hat{\gamma},\ w)$ are sens pentru orice $w \in \hat{G} = \mathbf{C} \setminus \{\hat{\gamma}\}$ și

$$n(\hat{\gamma}, w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\hat{\gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta - w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\hat{\gamma}'(t)}{\hat{\gamma}(t) - w}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - w}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f - w} = I\,(w)$$

Din egalitatea a) proprietatea b) rezultă folosind teorema indexului, iar c) din corolarul precedent, sau din (5.23.2). ☐

5.25. *Observații.* 1) Punctul c) al teoremei variației argumentului ne arată că ordinul funcției meromorfă f—w pe un disc D este egal cu numărul de cîte ori imaginea prin f a drumului circular (ce parcurge frontiera discului) ocolește punctul w.

2) Considerînd acum valoarea $w \in \hat{G} = \mathbf{C} \setminus \{\hat{\gamma}\}$ variabilă, numărul polilor fiind constant, teorema variației argumentului are următoarea interpretare geometrică: pînă w nu părăsește o componentă conexă a lui $\hat{G}$, numărul punctelor din D ale căror imagine prin f este w rămîne constant și se deplasează continuu (fiecare punct $z_0 \in D$ cu $f(z_0) = w$ fiind considerat cu ponderea ordinului său). Cînd w traversează $\{\hat{\gamma}\}$ și trece în altă componentă, acest număr se poate schimba, și anume o valoare $z_0 \in D$ se apropie de cerc și părăsește D sau invers, un nou $z_1 \notin D$ cu $f(z_1) = w$ (sau mai multe) se apropie de cerc și în momentul traversării de către w a lui $\{\hat{\gamma}\}$ punctul z_1 intră în D.

3) Dacă o valoare $w_0 \in \hat{G}$ e luată de f de n ori în D, atunci există un disc $\hat{D} = U(w_0 ; r)$ astfel ca orice valoare $w_1 \in \hat{D}$ să fie luată în D tot de n ori. Funcțiile reale nu îndeplinesc o astfel de proprietate. De exemplu, funcția $f(x) = x^2$ ia valoarea $w = 0$ în „două" puncte confundate din **R** (deci punctul $x = 0$ e de pondere 2) proprietatea îndeplinită pentru $w > 0$, dar valorile $w < 0$ nu sînt luate pe **R**. În schimb funcția complexă $f(z) = z^2$ ia în **C** orice valoare $w \in \mathbf{C}$ în două puncte.

5.26. **Teorema lui Rouché.** *Dacă* f, g *sînt olomorfe în* G, $D = U(z_0 ; r)$ *și* $\bar{D} \subset G$ *și pentru orice* $\zeta \in \partial D$ *avem* $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ *atunci*

$$\theta(f, D) = \theta(f + g, D)$$

Demonstrație. Din inegalitatea din enunț rezultă că f nu se anulează pe $\{\gamma\} \subset \bar{D}$ — unde $\gamma = \delta D$ — deci $h = \dfrac{g}{f}$ va fi meromorfă în componenta conexă D_1 a lui G ce include pe D și $\theta(f + g, D) - \theta(f, D) = = \theta\left(\dfrac{f + g}{f}, D\right) = \theta(\mathbf{1} + h, D)$ (vezi (5.20.7)). Să arătăm că $\theta(h + \mathbf{1}, D) = 0$. Aplicînd teorema variației argumentului avem $\theta(h + \mathbf{1}, D) = n(\hat{\gamma}, -1)$ unde $\hat{\gamma} = h \circ \gamma$. Dar $|\hat{\gamma}(t)| < 1$, adică $\{\hat{\gamma}\} \subset U(0 ; 1)$ deci $F = \mathbf{C} \setminus U(0 ; 1) \subset \subset \mathbf{C} \setminus \{\hat{\gamma}\}$. F fiind nemărginită și conexă, va fi inclusă în componenta nemărginită a mulțimii $\mathbf{C} \setminus \{\hat{\gamma}\}$ unde conform teoremei indexului valoarea indexului e zero. Dar $-1 \in F$, deci $n(\hat{\gamma}, -1) = 0$. □

5.27. *Aplicații.* 1) Vom determina numărul rădăcinilor ecuației $z^4 - 9z + 1 = 0$ în coroana circulară $U(0 ; 1, 3) = U(0 ; 3) \setminus \bar{U}(0 ; 1)$. În $U(0 ; 1)$ numărul rădăcinilor se poate determina aplicînd teorema lui Rouché funcțiilor $f(z) = -9z$, $g(z) = z^4 + 1$. Dacă $\zeta \in \partial U(0 ; 1)$ atunci $|\zeta| = 1$, deci $|\zeta^4 + 1)| \leqslant |\zeta|^4 + 1 \leqslant 2 < 9 = |-9\zeta|$. Prin urmare f are același număr de rădăcini ca f + g în $U(0 ; 1)$, adică 1. Cum pe $\partial U(0 ; 1)$, $|f(\zeta)| > |g(\zeta)|$, ecuația nu are rădăcini pe cerc, deci și în $\bar{U}(0 ; 1)$ avem o rădăcină. În $U(0 ; 3)$ alegem altă descompunere: $f(z) = z^4$, $g(z) = -9z + 1$ și pentru $\zeta \in \partial U(0 ; 3)$ avem $|-9\zeta + 1| \leqslant 9|\zeta| + 1 \leqslant 28 < 81 = |\zeta|^4$. Ecuația are în $U(0 ; 3)$ tot atîtea rădăcini ca f, adică 4, iar în coroana circulară numărul rădăcinilor va fi trei.

2) Teorema lui Rouché ne permite să dăm o nouă și foarte simplă demonstrație a teoremei fundamentale a algebrei. Fie $P(z) = a_n z^n +$

$+ a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0, a_n \neq 0$, $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$. Atunci $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{g(z)}{f(z)} = 0$ și pentru un r suficient de mare $\zeta \in \partial U\ (0;\ r)$ implică $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ și f avînd n rădăcini în $D = U\ (0\,;\ r)$ rezultă $n = \theta\ (f, D) = \theta\ (P, D)$, deci P are în $U\ (0\,;\ r)$ n rădăcini. □

Orice funcție olomorfă f pe mulțimea deschisă G fiind continuă contraimaginea unei mulțimi deschise va fi deschisă. Dar printr-o funcție continuă imaginea unei mulțimi deschise în general nu e deschisă. La o funcție $f = c$ de exemplu sau pentru $f(z) = |z|$ imaginea lui $U(0\,;\ r)$ nu e deschisă în $\mathbf{C}$.

5.28. Teorema de invarianță a domeniului. *Dacă* f *e olomorfă și neconstantă pe domeniul* D, *atunci oricare ar fi o submulțime deschisă* $G \subset D$ *imaginea ei* $f(G)$ *va fi deschisă în* $\mathbf{C}$.

Demonstrație. Fie $w_0 \in f(G)$. Există $z_0 \in G$ și $r_1 \in \mathbf{R}^+$ pentru care $f(z_0) = w_0$ și $\bar{D} \subset G$ unde $D = U\ (z_0;\ r_1)$ Funcția $f - w_0$ avînd zerourile izolate, va exista un $r \in \mathbf{R}^+$ mai mic decît r_1 astfel încît $\gamma = \partial U(z_0\,;\ r)$ să nu treacă prin nici un zero, adică $w_0 \in \mathbf{C} \setminus \{\hat{\gamma}\}$ unde $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ și putem aplica teorema variației argumentului: $I(w) = \theta(f - w,\ U\ (z_0\,;\ r))$ este local constantă. Avînd $I(w_0) > 0$ va exista $r_0 \in \mathbf{R}^+$ pentru care $w \in U(w_0\,;\ r_0)$ implică $\theta\ (f - w,\ U\ (z_0\,;\ r)) = \theta\ (f - w_0,\ U\ (z_0\,;\ r)) > 0$ ceea ce înseamnă că $w \in f(U(z_0\,;\ r)) \subset f(G)$. Deci $f(G)$ e deschisă.

5.29. *Observații.* 1) Denumirea teoremei e justificată de constatarea că dacă G e un domeniu atunci și $f(G)$ va fi domeniu deoarece orice funcție continuă transformă o mulțime conexă într-o mulțime conexă.

2) Dacă f e olomorfă pe o mulțime deschisă G_1, atunci condiția de „neconstantă" trebuie înlocuită cu „neconstantă local" adică pe fiecare componentă și atunci imaginea oricărei părți deschise G din G_1 va avea imaginea deschisă.

3) În studiul topologic al funcțiilor analitice un rol important îl joacă noțiunea de *transformare interioară* introdusă de S. Stoilow. O transformare $f : D \to \mathbf{C}$ definită pe domeniul D este interioară dacă transformă orice parte deschisă într-o mulțime deschisă și oricare ar fi $w \in f(D)$, contraimaginea $f^{-1}(w)$ nu conține nici o submulțime compactă și conexă (continuu) formată din mai multe puncte. O teoremă fundamentală a lui Stoilow afirmă că orice transformare interioară este omeomorfă cu o funcție olomorfă neconstantă.

CAPITOLUL VI

REPREZENTAREA CONFORMĂ

Întrucît orice funcție complexă se identifică cu o transformare punctuală în planul complex, aspectul geometric în studiul acestor funcții căpătă o importanță deosebită. În capitolul doi am văzut că o funcție olomorfă cu derivată nenulă se identifică cu o transformare conformă de clasă C^1. Această proprietate geometrică remarcabilă prezintă un mare interes în aplicațiile teoriei funcțiilor complexe în variate domenii ale științelor naturii.

O funcție univalentă (olomorfă și injectivă) se va identifica cu o reprezentare conformă a domeniului de definiție pe domeniul imagine. Rezultatul central al acestui capitol va fi demonstrarea existenței unei reprezentări conforme între două domenii simplu conexe (teorema lui Riemann). În acest scop, vom avea nevoie de anumite rezultate privind mulțimile de funcții olomorfe, precum și de unele proprietăți ale funcțiilor univalente. Cu această ocazie vom prezenta și un criteriu simplu de univalență, care are numeroase aplicații.

§ 1. MULȚIMI DE FUNCȚII OLOMORFE

Pînă acum am studiat îndeosebi proprietățile *unei* funcții olomorfe pe o mulțime deschisă G. De data aceasta ne interesează să punem în evidență anumite proprietăți ale unor *mulțimi* de funcții olomorfe, concepute ca mulțimi de puncte din spațiul funcțional $\mathscr{H}(G)$.

După cum am văzut, în virtutea teoremei lui Weierstrass, spațiul vectorial $\mathscr{H}(G)$, ca și spațiul mai larg $\mathscr{C}(G)$, se înzestrează cu structura topologică definită de convergența uniformă pe compacte. Deși ne vor interesa în mod deosebit părțile lui $\mathscr{H}(G)$, definițiile care urmează se referă la cazul mai general al părților lui $\mathscr{C}(G)$.

6.1. **Definiție.** O mulțime $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(G)$ se spune că este *echicontinuă în punctul* $z_0 \in G$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\eta = \eta(\varepsilon)$, astfel încît

$$z \in G,\ |z-z_0| < \varepsilon,\ f \in \mathscr{F} \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Mulţimea $\mathscr{F}$ se numeşte *echicontinuă* dacă ea este echicontinuă în fiecare punct din G.

Dacă $\mathscr{F}$ se reduce la o singură funcţie f, această definiţie coincide cu cea de continuitate a lui f în punctul z_0. Dacă $\mathscr{F}$ este formată din mai multe funcţii, este important să subliniem că numărul η este acelaşi pentru toate funcţiile din $\mathscr{F}$.

6.2. **Propoziţie.** *Dacă mulţimea $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(G)$ este echicontinuă şi şirul (f_n), $\mathrm{f}_n \in \mathscr{F}$, converge punctual pe o mulţime $E \subset G$, densă în G, către* f, *atunci şirul (f_n) converge uniform pe compacte în G către* f *şi* $\mathrm{f} \in \mathscr{C}(G)$.

Demonstraţie. 1) Vom presupune mai întîi că $E = G$, adică şirul (f_n) converge punctual pe G. Fie $z_0 \in G$ şi $\varepsilon > 0$. Din ipoteză rezultă că există un $r > 0$, astfel încît $\overline{U}(z_0\,;\, r) \subset G$ şi $|\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, pentru orice $z \in \overline{U}(z_0\,;\, r)$ şi orice $n \in \mathbf{N}$. Trecînd la limită în această inegalitate, deducem $|\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(z_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, care ne arată că f este continuă în z_0. Deoarece şirul (f_n) converge în z_0 către f, există un $n_0 > 0$, astfel încît $|\mathrm{f}_n(z_0) - \mathrm{f}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, pentru $n > n_0$. Deducem că pentru $z \in \overline{U}(z_0\,;\, r)$ şi $n > n_0$ avem

$$|\mathrm{f}_n(z) - \mathrm{f}(z)| \leqslant |\mathrm{f}_n(z) - \mathrm{f}_n(z_0)| + |\mathrm{f}_n(z_0) - \mathrm{f}(z_0)| + |\mathrm{f}(z) - \mathrm{f}(z_0)| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că şirul converge uniform pe $\overline{U}(z_0\,;\, r)$. Fie K un compact inclus în G. Deoarece oricare ar fi $z_0 \in K$ există un disc compact $\overline{U}(z_0\,;\, r)$, $r > 0$, pe care şirul (f_n) converge uniform, iar K poate fi acoperit cu un număr finit dintre aceste discuri, rezultă uşor că (f_n) converge uniform pe K către f. 2) În cazul general, fie $z_0 \in G$ şi $\varepsilon > 0$. Există un $r > 0$ astfel încît $\overline{U}(z_0\,;\, r) \subset G$ şi $|\mathrm{f}_n(z) - \mathrm{f}_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, pentru orice $z \in U(z_0\,;\, r)$ şi $n \in \mathbf{N}$. Deoarece E este densă în G, există un punct $z_1 \in E \cap U(z_0\,;\, r)$, iar şirul (f_n) fiind convergent în z_1, există un $n_0 > 0$ astfel ca

$$m,\ n > n_0 \Rightarrow |\mathrm{f}_m(z_1) - \mathrm{f}_n(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

deci

$$|\mathrm{f}_m(z_0) - \mathrm{f}_n(z_0)| \leqslant |\mathrm{f}_m(z_0) - \mathrm{f}_m(z_1)| + |\mathrm{f}_m(z_1) -$$

$$- \mathrm{f}_n(z_1)| + |\mathrm{f}_n(z_1) - \mathrm{f}_n(z_0)| < \varepsilon,$$

pentru orice $m,\ n > n_0$, ceea ce arată că şirul (f_n) converge punctual pe G şi din prima etapă a demonstraţiei rezultă că el converge uniform pe compacte în G, iar limita sa este continuă. ☐

6.3. **Definiţie.** O mulţime $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(G)$ se spune că este *mărginită* dacă oricare ar fi compactul $K \subset G$ există un $M = M(K) > 0$, astfel încît

$$z \in K,\ \mathrm{f} \in F \Rightarrow |\mathrm{f}\,(z)| \leqslant M.$$

(Conform observaţiei de la (4.1), este suficient ca această proprietate să aibă loc pentru orice disc compact inclus în G.)

Remarcăm că numărul M este același pentru toate funcțiile din $\mathscr{F}$.

6.4. **Propoziție.** *Dacă mulțimea* $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(G)$ *este mărginită atunci și mulțimea* $\mathscr{F}' = \{f', ; f \in \mathscr{F}\}$ *este mărginită.*

Demonstrație. Fie $\overline{U}(z_0 ; r)$, $r > 0$, un disc compact arbitrar inclus în G. Vom alege un $R > r$ astfel ca $\overline{U}(z_0 ; R) \subset G$. Dacă $f \in \mathscr{F}$ și $z \in \overline{U}(z_0 ; r)$, aplicînd formula lui Cauchy, avem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta, \text{ unde } \gamma = \partial U\,(z_0 ; r).$$

Deoarece $\{\gamma\}$ este un compact inclus în G, din ipoteză rezultă că există $M > 0$ astfel încît $|f(\zeta)| \leqslant M$ pentru orice $\zeta \in \{\gamma\}$ și orice $f \in \mathscr{F}$, deci

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{(R-r)^2} 2\pi R = \frac{M}{(R-r)^2} = M',$$

pentru orice $z \in \overline{U}(z_0 ; r)$ și $f \in \mathscr{F}$, de unde rezultă că $\mathscr{F}$ este mărginită. □

6.5. **Propoziție.** *Dacă* $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(G)$ *este mărginită atunci* $\mathscr{F}$ *este echicontinuă.*

Demonstrație. Fie $z_0 \in G$ și $r > 0$ astfel încît $\overline{U}(z_0 ; r) \subset G$. Deoarece, conform cu (6.4), $\mathscr{F}'$ este mărginită, iar $\overline{U}(z_0 ; r)$ este un compact inclus în G, va exista $M > 0$ astfel încît

$$\zeta \in \overline{U}\,(z_0 ; r),\ f \in \mathscr{F} \Rightarrow |f'(\zeta)| \leqslant M.$$

Pe de altă parte, dacă $z \in U(z_0 ; r)$, integrînd de-a lungul drumului liniar de la z_0 la z, avem

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} f'(\ )\, d\zeta,$$

de unde deducem $|f(z) - f(z_0)| \leqslant M\,|z - z_0|$, pentru orice $z \in U(z_0 ; r)$ și orice $f \in \mathscr{F}$, ceea ce implică echicontinuitatea lui $\mathscr{F}$ în z_0, care a fost ales arbitrar în G □.

Din (6.2) și (6.5), deducem imediat următorul

6.6. **Corolar.** *Dacă mulțimea* $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(G)$ *este mărginită, iar șirul* (f_n), $f_n \in \mathscr{F}$, *converge punctual pe o submulțime a lui* G, *care este densă în* G, *atunci șirul* (f_n) *converge uniform pe compacte în* G. □

6.7. **Definiție.** O mulțime $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(G)$ se spune că este *relativ compactă* dacă oricare ar fi șirul (f_n), $f_n \in \mathscr{F}$, există un subșir (f_{n_k}) *al său care converge uniform pe compacte în* G.

În cazul spațiilor euclidiene, conform teoremei lui Bolzano-Weierstrass, mulțimile mărginite coincid cu cele relativ compacte. Această proprietate se extinde la spațiul $\mathscr{H}(G)$.

6.8. **Teorema lui Montel** *Pentru ca o mulțime* $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(G)$ *să fie relativ compactă este necesar și suficient ca ea să fie mărginită.*

Demonstrație. 1) Să presupunem că $\mathscr{F}$ este relativ compactă. Dacă ea nu ar fi mărginită, ar exista un compact $K \subset G$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $f_n \in \mathscr{F}$ și $z_n \in K$ astfel încît $|f_n(z_n)| > n$. Din șirul (f_n) se poate extrage un subşir (f_{n_k}), care converge uniform pe compacte în G către o funcţie $\mathrm{f}\in\mathscr{H}(G)$. În particular, şirul $(\mathrm{f}_{n_k}|K)$ converge uniform către $\mathrm{f}|K$, de unde deducem că există un $k_0 > 0$ astfel încît $|\mathrm{f}_{n_k}(z_{n_k}) - \mathrm{f}(z_{n_k})| < 1$, pentru orice $k > k_0$. Funcţia f fiind mărginită pe K, va exista un $M > 0$ astfel încît $|\mathrm{f}(z)| \leqslant M$ pentru orice $z \in K$, în particular $|\mathrm{f}(z_{n_k})| \leqslant M$ şi deducem $|\mathrm{f}_{n_k}(z_{n_k})| < 1+M$, pentru $k > k_0$, ceea ce contrazice inegalitatea $|\mathrm{f}_{n_k}(z_{n_k})| > n_k$, care are loc pentru orice $k \in \mathbf{N}$,. 2) Să presupunem că $\mathscr{F}$ este mărginită şi fie $S = (\mathrm{f}_n\,;\, n \in \mathbf{N}^*)$ un şir oarecare de funcţii din $\mathscr{F}$. Fie $E = \{z_1, z_2, \ldots\}$ o mulţime numărabilă de puncte din G, care este densă în G (de exemplu mulţimea punctelor din G, care au părţile reale şi imaginare numere raţionale). Şirul de numere complexe

$$\mathrm{f}_1(z_1),\ \mathrm{f}_2(z_1),\ \ldots,\ \mathrm{f}_n(z_1),\ \ldots$$

este evident mărginit şi conform teoremei lui Bolzano-Weierstrass, din el se poate extrage un subşir convergent

$$\mathrm{f}_{11}(z_1),\ \mathrm{f}_{21}(z_1),\ \ldots,\ f_{n1}(z_1),\ \ldots$$

Şirul de funcţii $S_1 = (\mathrm{f}_{11}, \mathrm{f}_{21}, \ldots, \mathrm{f}_{n1} \ldots)$ este extras din S şi converge în z_1. Procedînd ca mai sus, din S_1 se poate extrage un subşir $S_2 = (\mathrm{f}_{11}, \mathrm{f}_{22}, \mathrm{f}_{32}, \ldots, \mathrm{f}_{n2}, \ldots)$, care converge în z_1 şi z_2. Continuînd în acelaşi mod, se construieşte inductiv un şir (S_n) de subţiruri ale lui S, unde $S_n = (\mathrm{f}_{11}, \mathrm{f}_{22}, \ldots \ldots, \mathrm{f}_{nn}, \mathrm{f}_{n+1,n}, \ldots)$ este extras din S_{n-1} şi converge în punctele $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Se constată uşor că şirul diagonal (f_{nn}) este extras din orice şir S_n, deci el converge pe E. Aplicînd corolarul (6.6), deducem că acest şir converge uniform pe compacte în G. □

6.9. *Exemple* 1) Fie G şi G_1 mulţimi deschise din $\mathbf{C}$, iar G_1 mărginită. Atunci $\mathscr{F} = \{\mathrm{f} \in \mathscr{H}(G)\,;\, \mathrm{f}(G) \subset G_1\}$ este mărginită, deci va fi relativ compactă.

2) Fie $U = U(0:1)$ şi $\mathscr{F} = \left\{\mathrm{f} \in \mathscr{H}(U)\,;\ |\mathrm{f}(z)| \leqslant \dfrac{1}{1-|z|},\ z \in U\right\}$.

Această mulţime nu este vidă deoarece, de exemplu, $\mathrm{g}\in\mathscr{F}$, unde $\mathrm{g}(z) = \dfrac{1}{1+z}$.

$\mathscr{F}$ este mărginită, deoarece pentru orice $r \in [0,1[$ avem

$$z \in \overline{U}\,(0\,;\,r),\ \mathrm{f} \in \mathscr{F} \Rightarrow |\mathrm{f}(z)| \leqslant \frac{1}{1-r}.$$

Conform teoremei lui Montel $\mathscr{F}$ este relativ compactă.

3) Dacă $\mathrm{f} \in \mathscr{H}(G)$ şi $\mathscr{F} = \{\mathrm{f}+c\,;\, c \in \mathbf{C}\}$ atunci $\mathscr{F}$ nu este mărginită, deci nu este relativ compactă.

În cazul cînd mulţimea deschisă G este şi conexă (un domeniu) are loc următoarea proprietate mai tare decît cea din (6.6).

6.10. **Teorema lui Vitali.** *Dacă D este un domeniu din $\mathbf{C}$ şi (f_n) este un şir mărginit, care converge punctual pe o submulţime $E \subset D$, care are cel puţin un punct de acumulare în D, atunci şirul (f_n) converge uniform pe compacte în D.*

Demonstrație. Din (6.6) rezultă că este suficient să arătăm că șirul (f_n) converge punctual pe D. Dacă nu ar fi așa, ar exista un punct $z_0 \in D$ astfel încît șirul de numere complexe $(f_n(z_0))$ să fie divergent. Deoarece acest șir este mărginit, rezultă că el va avea cel puțin două puncte limită distincte w_0 și w_1, deci vor exista două subșiruri $(f_{n1}(z_0))$ și $(f_{n2}(z_0))$ care vor converge către w_0, respectiv w_1. Aplicînd teorema lui Montel, din fiecare dintre șirurile (f_{n1}), respectiv (f_{n2}), se poate extrage cîte un subșir uniform convergent pe compacte către f, respectiv g, care vor fi în $\mathscr{H}(D)$. Deoarece aceste șiruri sînt extrase din șirul (f_n), care converge pe E, rezultă $f|E = g|E$. Deoarece E are puncte de acumulare în D, din teorema identității funcțiilor olomorfe rezultă $f = g$. Dar aceasta contrazice faptul că $f(z_0) = w_0 \neq w_1 = g(z_0)$. □

§ 2. FUNCȚII UNIVALENTE

6.11. **Definiție.** O funcție olomorfă și injectivă pe un domeniu D din $\mathbb{C}$ se numește *univalentă* pe D. Vom nota cu $\mathscr{H}_u(D)$ mulțimea funcțiilor univalente pe D.

Noțiunea de funcție univalentă, care ocupă un loc central în teoria geometrică a funcțiilor complexe, se poate generaliza în mod natural, introducîndu-se noțiunea de funcție multivalentă de un ordin m, prin aceasta înțelegînd o funcție olomorfă pe D, care ia orice valoare a sa în cel mult m puncte distincte din D și există cel puțin o valoare luată în exact m puncte distincte. Astfel funcția $z \mapsto z^2$ este multivalentă de ordinul doi, sau pe scurt, bivalentă pe $\mathbb{C}$.

6.12. *Exemple.* 1) Orice funcție omografică este univalentă pe $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, unde z_0 este polul funcției.

2) Funcția $f(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$ este univalentă pe $U = U(0;\ 1)$, iar $f(U) = \mathbb{C} \setminus \left[\dfrac{1}{4},\ +\infty\right[$. Injectivitatea se arată ușor, iar din $f(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$, $\theta \in \mathbb{R}$, deducem $f(\partial U) = \left[\dfrac{1}{4},\ +\infty\right[\cup \{\infty\}$

3) Prin compunerea a două funcții univalente se obține tot o funcție univalentă.

4) Funcția $f(z) = \log\dfrac{1-z}{1+z}$ este univalentă pe $U = U(0;\ 1)$ și $D = f(U) = \left\{w \in \mathbb{C};\ -\dfrac{\pi}{2} < \mathbf{Im}\ w < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ (prin logaritm se înțelege acea ramură uniformă pe $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C};\ \mathbf{Re}\ \zeta > 0\}$ cu $\log 1 = 0$). În adevăr funcția $g(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$ este univalentă pe U și $g(U) \neq \Delta$, iar funcția $h(\zeta) = \log \zeta$ este univalentă pe Δ și $h(\Delta) = D$, de unde rezultă că $f = h \circ g$ este univalentă pe U și $f(U) = D$.

6.13. **Teoremă.** *Dacă* $f \in \mathscr{H}_u(D)$, *atunci* $f'(z) \neq 0$ *pentru orice* $z \in D$.

Demonstrație. Să presupunem că există un punct $z_0 \in D$ astfel ca $f'(z_0) = 0$. Din această condiție și univalența lui f, rezultă ușor că f și f' nu pot fi constante, deci conform teoremei zerourilor funcţiilor olomorfe (4.19), există un $r > 0$ astfel încît $\overline{U}(z_0 ; r) \subset D$ şi să avem $f'(z) \neq 0$ pentru orice $z \in \dot{U}(z_0 ; r)$ şi $f(z) \neq f(z_0)$ pentru orice $z \in C = \partial U(z_0 ; r)$. Deoarece funcţia continuă $f - f(z_0)$ nu se anulează pe compactul C, avem $\min\limits_{z \in C} |f(z) - (z_0)| = m > 0$. Pe baza continuităţii lui f în z_0, putem alege un $z_1 \in \dot{U}(z_0 ; r)$, suficient de apropiat de z_0, astfel încît $|f(z_1) - f(z_0)| < m$, deci $|f(z_1) - f(z_0)| < |f(z) - f(z_0)|$, pentru orice $z \in \mathbf{C}$. Din teorema lui Rouché rezultă că funcţiile $f - f(z_0)$ şi $f - f(z_1) = f - f(z_0) + [f(z_0) - f(z_1)]$ au acelaşi ordin în $U(z_0 ; r)$. Deoarece $f'(z_0) = 0$, ordinul lui $f - f(z_0)$ este cel puţin doi, ca şi ordinul lui $f - f(z_1)$. Condiţia $f'(z_1) \neq 0$ arată că z_1 este un zero simplu al lui $f - f(z_1)$. Rezultă că în $U(z_0 ; r)$ va exista cel puţin un alt zero z_2 al lui $f - f(z_1)$ diferit de z_1, deci $f(z_2) = f(z_1)$, unde $z_2 \neq z_1$, ceea ce contrazice injectivitatea lui f. □

Din (6.13) şi (2.88) rezultă că dacă $f \in \mathscr{H}_u(D)$ transformarea f este *conformă* pe D.

6.14. *Observaţie.* Reciproca teoremei (6.13), nu este, în general, valabilă, după cum arată exemplul dat de funcţia $z \mapsto e^z$, care nu este univalentă pe $\mathbf{C}$, deşi derivata sa nu se anulează în nici un punct din $\mathbf{C}$. Este interesant de remarcat că pentru funcţiile reale derivabile neanularea derivatei pe un interval este o condiţie suficientă de injectivitate, dar nu este necesară, după cum arată exemplul $x \mapsto x^3$ ($x \in \mathbf{R}$). Această deosebire esenţială dintre cazul real şi cel complex se explică prin faptul că pentru funcţiile complexe nu are loc teorema de medie a lui Lagrange, în schimb este valabilă o anumită reciprocă a acestei teoreme, fenomen pus în evidenţă de D. Pompeiu şi exprimat de propoziţia care urmează.

6.15. **Propoziţie.** *Dacă* $f \in \mathscr{H}(D)$ *şi* $z_0 \in D$, *atunci în orice disc* $U(z_0 ; r) \subset D$ *există cel puţin două puncte distincte* z_1 şi z_2 *astfel încît* $f(z_1) - f(z_2) = f'(z_0)(z_1 - z_2)$.

Demonstraţie. 1) Fie $f'(z_0) = 0$. Dacă $f' \equiv 0$, rezultatul este banal. În caz contrar, atît f cît şi f' nu sînt constante şi repetînd demonstraţia teoremei (6.13), deducem existenţa a două puncte distincte $z_1, z_2 \in U(z_0 ; r)$ astfel ca $f(z_1) - f(z_2) = 0$. 2) Dacă $f'(z_0) \neq 0$, se consideră funcţia $g(z) = f(z) - f'(z_0) z$, $z \in D$, pentru care $g'(z_0) = 0$, deci există $z_1, z_2 \in U(z_0 ; r)$, $z_1 \neq z_2$, astfel ca $g(z_1) = g(z_2)$, ceea ce implică $f(z_1) - f(z_2) = f'(z_0)(z_1 - z_2)$. □

Condiţia $f'(z) \neq 0$ în D, care după cum am văzut, este necesară dar nu suficientă pentru univalenţa unei funcţii $f \in \mathscr{H}(D)$, este însă o condiţie suficientă pentru a asigura proprietatea de *univalenţă locală* a funcţiei f, conform observaţiei (3.27.4). O condiţie suficientă de univalenţă a unei funcţii olomorfe, pe un domeniu, care este des aplicată datorită simplităţii ei, este dată de următoarea

6.16. **Teoremă.** *Dacă* f *este o funcţie olomorfă pe un domeniu simplu conex* D *şi există o funcţie* $g \in \mathscr{H}_u(D)$ *astfel încît* $g(D)$ *este un domeniu convex şi* $\operatorname{Re} \dfrac{f'(z)}{g'(z)} > 0$, *pentru orice* $z \in D$, *atunci* f *este univalentă pe* D.

Demonstraţie. Fie $\Delta = g(D)$. Deoarece g este univalentă, există funcţia inversă g^{-1}, care este olomorfă pe domeniul convex Δ. Rezultă că funcţia $h = f \circ g^{-1}$ este olomorfă pe Δ şi avem

$$\operatorname{Re} h'(w) = \operatorname{Re} \frac{f'(z)}{g'(z)} > 0, \text{ pentru } w = g(z) \in \Delta.$$

Dacă w_1 și w_2 sînt puncte distincte din Δ, integrînd de-a lungul drumului liniar de la w_1 la w_2, care are suportul în domeniul convex Δ, obținem

$$h(w_2)-h(w_1)=\int_{w_1}^{w_2} h'(w)\,dw=(w_2-w_1)\int_0^1 h'[w_1+t(w_2-w_1)]\,dt,$$

deci

$$\mathrm{Re}\,\frac{h(w_2)-h(w_1)}{w_2-w_1}=\int_0^1 \mathrm{Re}\,h'[w_1+t(w_2-w_1)]\,dt>0,$$

de unde rezultă imediat că h este injectivă pe Δ și deducem că $f=h\circ g$ este univalentă pe D. □

6.17. **Corolar.** *Dacă D este un domeniu convex și $f\in\mathscr{H}(D)$ astfel încît* $\mathrm{Re}\,f'(z)>0$, *pentru orice $z\in D$, atunci f este univalentă pe D.* □

6.18. **Corolar.** *Dacă $U=U(0\,;1)$ și $f\in\mathscr{H}(U)$ astfel încît* $\mathrm{Re}[(1-z^2)f'(z)]>0$, *pentru orice $z\in U$, atunci f este univalentă.*

Într-adevăr, conform cu (3.22), fie g acea ramură uniformă pe U, care verifică $e^{g(z)}=\dfrac{1+z}{1-z}$, $z\in U$ și $g(0)=0$. Din exemplul (6.12.4) rezultă că $g\in\mathscr{H}_u(U)$ și $g(U)$ este un domeniu convex. Deoarece $\mathrm{Re}\,\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=$ $=\mathrm{Re}\,[(1-z^2)\,f'(z)]>0$ din (6.16), deducem $f\in\mathscr{H}(U)$. □

Ca o aplicație a acestui criteriu de univalență, vom demonstra univalența unor funcții olomorfe reprezentabile prin integrale de tip Poisson-Schwarz.

6.19. **Propoziție.** *Dacă funcția continuă și neconstantă $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbf{R}$ este crescătoare pe intervalul $[0,\pi]$ și descrescătoare pe intervalul $[\pi,2\pi]$ și $U=U(0\,;1)$, atunci funcția $f:U\to\mathbf{C}$ definită prin*

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\varphi(t)\,dt,\quad z\in U,$$

este univalentă pe U.

Demonstrație. Din propoziția (3.18), relativă la integralele ce depind de un parametru, se deduce ușor că f este olomorfă pe U și

$$f'(z)=2\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\,\varphi(t)\,dt,\ z\in U.$$

Folosind proprietatea (3.5.1) a integralei Stieltjes-Riemann, putem scrie

$$f'(z)=2i\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^{it}-z}\right)\varphi(t)\,dt=i\left[\frac{\varphi(t)}{e^{it}-z}\bigg|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{e^{it}-z}\right]=$$

$$=2i\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}-1}{(1-z)(e^{it}-z)}\,d\varphi(t).$$

De aici deducem

$$\frac{1}{2}\mathbf{Re}[(z^2-1)f'(z)] = \mathbf{Re}\left[i\int_0^{2\pi}\frac{(z+1)(1-e^{it})}{e^{it}-z}\,d\varphi(t)\right] =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\frac{\mathbf{Im}[(z+1)(1-e^{it})(e^{-it}-z)]}{|e^{it}-z|^2}\,d\varphi(t) = (1-|z|^2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{|e^{it}-z|}\,d\varphi(t).$$

Deoarece $\sin t \geqslant 0$, pentru $t \in [0, \pi]$ și $\sin t \leqslant 0$, pentru $t \in [\pi, 2\pi]$, din condiția impusă funcției φ, rezultă imediat $\mathbf{Re}[(z^2-1)\,f'(z)] > 0$, pentru $z \in U$. Din (6.18) deducem că $-f$, deci f este univalentă pe U.□

Cu privire la șirurile de funcții univalente, are loc următoarea proprietate

6.20. **Teorema lui Hurwitz.** *Dacă șirul* (f_n) *de funcții univalente pe domeniul* D *converge uniform pe compacte în* D *către o funcție* f *neconstantă, atunci* $f \in \mathscr{H}_u(D)$.

Demonstrație. Din teorema lui Weierstrass (4.4) rezultă că $f \in \mathscr{H}(D)$. Să presupunem că f nu este injectivă, adică există $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, astfel încît $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Deoarece f nu este constantă, conform teoremei zerourilor funcțiilor olomorfe (4.19), există un $r > 0$ astfel ca $\overline{U}(z_1; r) \cup \overline{U}(z_2; r) \subset D$, $\overline{U}(z_1; r) \cap \overline{U}(z_2; r) = \emptyset$ și pentru orice $z \in C_1 \cup C_2$, unde $C_1 = \partial U(z_1; r)$, $C_2 = \partial U(z_2; r)$, să avem $f(z) - w_0 \neq 0$. Fie $m = \min\limits_{z \in C_1 \cup C_2} |f(z) - w_0| > 0$. Deoarece șirul (f_n) converge uniform pe compacte, există $n_0 > 0$ astfel ca

$$n > n_0,\ z \in C_1 \cup C_2 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < m.$$

Deci pentru $n > n_0$ și $z \in C_1 \cup C_2$ avem $|f_n(z) - f(z)| < |f(z) - w_0|$ și aplicînd teorema lui Rouché (5.26) deducem că pentru $n > n_0$ avem $0(f - w_0, U(z_k; r)) = 0(f_n - w_0, U(z_k; r))$, $k \in \overline{1, 2}$, deci $f_n - w_0$ se anulează în ambele discuri, ceea ce contrazice injectivitatea lui f_n. □

§ 3. PROBLEMA REPREZENTĂRII CONFORME

Am văzut că imaginea unui domeniu $D \subset \mathbf{C}$ printr-o funcție olomorfă neconstantă este tot un domeniu $\Delta = f(D)$. Dacă în plus $f'(z) \neq 0$ în D, atunci această transformare este conformă, adică conservă mărimea și sensul unghiurilor, după cum s-a văzut la (2.89). Reciproc, orice transformare conformă (de clasă C^1) pe D este o funcție olomorfă cu derivată nenulă pe D ((propoziția (2.93)). Din acest motiv, putem considera că o transformare conformă este o funcție olomorfă cu derivată nenulă.

Dacă f este univalentă pe D, atunci ea realizează un omeomorfism între D și $\Delta = f(D)$, iar transformarea inversă f^{-1} este univalentă pe Δ. Pe de altă parte, conform teoremei (6.13), transformarea f este conformă, ca și f^{-1}.

6.21. **Definiții.** Fiind date domeniile D și Δ din $\mathbf{C}$, o funcție $f \in \mathscr{H}_u(D)$ astfel ca $f(D) = \Delta$ se numește *reprezentare conformă* (sau *izomorfism conform*) a domeniului D pe domeniul Δ. Domeniile D și Δ se zic *conform echivalente* dacă există o reprezentare conformă a lui D pe Δ. În acest caz transformarea inversă va fi o reprezentare conformă a lui Δ pe D. O reprezentare conformă a lui D pe el însuși se numește, *automorfism conform* al lui D. Mulțimea automorfismelor conforme ale lui D formează, evident, un grup de transformări, care se numește *grupul conform* al lui D, pe care îl vom nota $A(D)$.

Problema *directă* a reprezentării conforme constă în a găsi imaginea unui domeniu D, dacă se dă $f \in \mathscr{H}_u(D)$. Pentru unele funcții elementare o astfel de problemă a fost rezolvată în capitolul doi.

O problemă mai grea, dar foarte importantă în aplicații, este cea *inversă*, care este propriu-zis *problema reprezentării conforme*: fiind date două domenii D și Δ din $\mathbf{C}$, să se găsească o reprezentare conformă a lui D pe Δ, adică să se găsească $f \in \mathscr{H}_u(D)$ astfel încît $f(D) = \Delta$.

Desigur, că prima întrebare care se pune este cea a *existenței* unei astfel de reprezentări. Să observăm că dacă D este un domeniu simplu conex și f este univalentă pe D, din faptul că f este un omeomorfism rezultă imediat că și $\Delta = f(D)$ este un domeniu simplu conex. În adevăr, dacă γ este un drum închis din Δ, atunci $f^{-1} \circ \gamma$ este un drum închis din D, care va fi omotop cu zero în D, iar dacă φ este o deformație continuă a lui $f^{-1} \circ \gamma$ în punctul $z_0 \in D$, atunci $f \circ \varphi$ va fi o deformație continuă a lui γ în punctul $f(z_0) \in \Delta$, deci γ va fi omotop cu zero în Δ. De aici deducem că un domeniu simplu conex nu se poate reprezenta conform decît tot pe un domeniu simplu conex. Astfel un disc nu poate fi reprezentat conform pe o coroană circulară.

6.22. **Propoziție.** *Dacă* f_0 *este o reprezentare conformă a lui* D *pe* Δ, *atunci mulțimea tuturor reprezentărilor conforme ale lui* D *pe* Δ *este* $\{f\,;\, f = \varphi \circ f_0,\ \varphi \in A(\Delta)\}$.

În adevăr, dacă f este o astfel de reprezentare, atunci $\varphi = f \circ f_0^{-1} \in A(\Delta)$. Invers, dacă $\varphi \in A(\Delta)$, atunci $f = \varphi \circ f_0$ este o reprezentare conformă a lui D pe Δ. □

6.23. **Propoziție.** *Orice reprezentare conformă* $f : D \to \Delta$ *induce un izomorfism de grup* $f^* : A(D) \to A(\Delta)$ *definit de* $f^*(\varphi) = f \circ \varphi \circ f^{-1}$, *pentru orice* $\varphi \in A(D)$.

În adevăr, dacă $\varphi \in A(D)$, se verifică imediat că $f^*(\varphi) \in A(\Delta)$. Dacă $\psi \in A(\Delta)$, atunci $f^{-1} \circ \psi \circ f \in A(D)$. Pe de altă parte avem $f^{-1} \circ \varphi_1 \circ f = f^{-1} \circ \varphi_2 \circ f \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$, deci aplicația f^* este bijectivă. Mai avem $f^*(\varphi_1) \circ f^*(\varphi_2) = (f \circ \varphi_1 \circ f^{-1}) \circ (f \circ \varphi_2 \circ f^{-1}) = f \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ f^{-1} = f^*(\varphi_1 \circ \varphi_2)$, deci f^* este izomorfism de grup. □

În ceea ce urmează vom nota cu $U = U(0,1)$ și îl numim *discul unitate* al planului complex.

6.24. **Teoremă.** *Grupul conform* $A(U)$ *al discului unitate este subgrupul transformărilor omografice* φ *de forma*

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbf{R},\ a \in U.$$

Demonstrație. 1) Orice transformare omografică φ de forma de mai sus este un automorfism conform al lui U, după cum s-a văzut la (2.73).

2) Fie $f \in A(U)$ și să notăm $f(o) = w_0$. Să considerăm funcția $g = \varphi \circ f$, unde $\varphi \in A(U)$ este definită de

$$\varphi(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w}, \quad w \in U.$$

Deoarece $g(o) = 0$ și $|g(z)| < 1$, pentru $z \in U$, aplicînd lema lui Schwarz, deducem $|g(z)| \leqslant |z|$, pentru orice $z \in U$. Pe de altă parte, funcția inversă $g^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$ îndeplinește și ea condițiile lemei lui Schwarz și avem $|g^{-1}(w)| \leqslant |w|$, pentru orice $w \in U$. Punînd $w = g(z)$, deducem $|z| \leqslant |g(z)|$. Din cele două inegalități deducem $|g(z)| = |z|$, $z \in U$. Această egalitate fiind valabilă numai cînd $g(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbf{R}$, deducem că $f(z) = \varphi^{-1}(e^{i\theta} z)$. Punînd $a = -e^{i\theta} w_0$, obținem $f(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$. □

§ 4. REPREZENTAREA CONFORMĂ A DOMENIILOR SIMPLU CONEXE. TEOREMA LUI RIEMANN

După cum am observat, un domeniu simplu conex nu poate fi conform echivalent decît tot cu un domeniu simplu conex. În ceea ce urmează ne vom limita numai la astfel de domenii, dintre care vom distinge două domenii „standard”, anume planul **C** și discul unitate U. Se poate arăta ușor, considerînd de exemplu funcția $f : U \to \mathbf{C}$, definită de $f(z) = \dfrac{z}{1 - |z|}$, $z \in U$, că **C** și U sînt omeomorfe. În schimb are loc următoarea

6.25. **Propoziție.** *Domeniile* **C** *și* U *nu sînt conform echivalente.*

În adevăr, dacă ar exista $f \in \mathscr{H}_u(\mathbf{C})$ și $f(\mathbf{C}) = U$, funcția f ar fi întreagă și mărginită; conform teoremei lui Liouville ea s-ar reduce la o constantă, ceea ce nu este posibil. □

De aici rezultă că, dacă vrem să reprezentăm conform un domeniu simplu conex D pe U, va trebui să presupunem $D \neq \mathbf{C}$.

Înainte de a demonstra teorema fundamentală privind existența unei astfel de reprezentări, vom preciza mulțimea tuturor reprezentărilor conforme ale unui domeniu simplu conex pe U. Anume din (6.22) și (6.24), deducem imediat următoarea

6.26. **Propoziție.** *Dacă D este un domeniu simplu conex din* **C** *și $f_0 : D \to U$ este o reprezentare conformă a lui D pe U, atunci mulțimea tuturor reprezentărilor conforme ale lui D pe U este formată din toate funcțiile $f : D \to U$, care sînt definite în D prin*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{f_0(z) - a}{1 - \bar{a} f_0(z)}, \quad \theta \in \mathbf{R}, a \in U. \ \square$$

De aici rezultă că mulțimea reprezentărilor conforme ale lui D pe U formează o familie de funcții univalente pe D depinzînd de trei parametri reali. Vom putea deci dispune de acești parametri pentru a determina o anumită reprezentare conformă, care să verifice anumite condiții suplimentare. Astfel în această familie există *o singură funcție* f, care verifică condițiile $f(z_0) = 0$ și $f'(z_0) > 0$, unde z_0 este un punct fixat din D. Într-adevăr, prima condiție îl determină pe $a = f_0(z_0)$, iar a doua condiție, care se poate scrie $\arg f'(z_0) = 0$, ne dă imediat $\theta = -\arg f_0'(z_0)$.

6.27. **Teorema lui Riemann**. *Orice domeniu simplu conex D din* $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, *este conform echivalent cu discul unitate U.*

Demonstrație. 1) Să fixăm un punct $z_0 \in D$ și fie

$$\mathcal{F} = \{f;\ f \in \mathcal{H}_u(D),\ f(z_0) = 0 \text{ și } f(D) \subset U\}$$

Vom arăta mai întîi că mulțimea $\mathcal{F}$ nu este vidă. Deoarece $D \neq \mathbb{C}$, putem alege un punct $a \in \mathbb{C} \setminus D$. Conform teoremei ramurilor uniforme (3.22), există o funcție $g \in \mathcal{H}(D)$ astfel ca $[g(z)]^2 = z - a$, $z \in D$. Dacă $z_1, z_2 \in D$ și $g(z_1) = \pm g(z_2)$, atunci $[g(z_1)]^2 = [g(z_2)]^2$ deci $z_1 = z_2$. În particular rezultă că $g \in \mathcal{H}_u(D)$. Deoarece $g(D)$ este un domeniu, există $r > 0$ astfel ca $U(g(z_0); r) \subset g(D)$. Să arătăm că $U(-g(z_0); r) \cap g(D) = \emptyset$. În adevăr, în caz contrar, ar exista un $z_1 \in D$ astfel încît $|g(z_1) + g(z_0)| < r$, care înseamnă că $-g(z_1) \in U(g(z_0); r) \subset g(D)$, deci va exista un $z_2 \in D$ astfel încît $g(z_1) = -g(z_2)$, ceea ce implică $z_1 = z_2$, deci $g(z_1) = 0$ adică $z_1 = a$, ceea ce nu este posibil. Rezultă că funcția $g_1 = \dfrac{r}{g + g(z_0)}$ este univalentă pe D și $g_1(D) \subset U$. Alegînd $\varphi \in A(U)$ astfel încît $\varphi[g_1(z_0)] = 0$, și notînd $g_2 = \varphi \circ g_1$, deducem că g_2 este univalentă pe D, $g_2(z_0) = 0$ și $g_2(D) \subset U$, deci $g_2 \in \mathcal{F}$.

2) Să atașăm fiecărei funcții $f \in \mathcal{F}$ numărul strict pozitiv $|f'(z_0)|$. Deoarece acest număr reprezintă coeficientul de deformare liniară în punctul z_0 prin transformarea f, ne putem aștepta ca pentru funcția căutată $f_0 \in \mathcal{F}$, pentru care $f_0(D) = U$ (adică domeniul $f_0(D)$ este cel mai „întins”), $|f_0'(z_0)|$ să aibă valoarea maximă. Fie atunci $M = \mathbf{sup}\,\{|f'(z_0)|,\ f \in \mathcal{F}\}$. Din definiția lui $\mathcal{F}$ rezultă că această mulțime este mărginită, iar din (6.4) rezultă că și $\mathcal{F}' = \{f';\ f \in \mathcal{F}\}$ este mărginită și deducem că $0 < M < +\infty$. Din definiția lui M rezultă că oricare ar fi $n \in N^*$ există $f_n \in \mathcal{F}$ astfel încît

$$M - \frac{1}{n} < |f_n'(z_0)| \leqslant M,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n'(z_0)| = M$. Deoarece mulțimea $\mathcal{F}$ este mărginită, conform teoremei lui Montel, ea este relativ compactă, deci din șirul (f_n) se poate extrage un subșir (f_{n_k}) uniform convergent pe compacte către $f_0 \in \mathcal{H}(D)$. În particular, $f_0(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = 0$. Conform teoremei lui Weierstrass, șirul (f'_{n_k}) converge uniform pe compacte către f_0'. De aici rezultă că $M = \lim\limits_{k\to\infty} |f'_{n_k}(z_0)| = |f_0'(z_0)|$. Funcția f_0 nu poate fi o constantă, deoarece, în caz contrar, din $f_0(z_0) = 0$ ar rezulta că este identic nulă, ceea ce intră în contradicție cu $|f_0'(z_0)| = M > 0$. Deoarece funcțiile f_{n_k} sînt univalente, din teorema lui Hurwitz deducem că $f_0 \in \mathcal{H}_u(D)$. Pe de altă parte, avem $|f_{n_k}(z)| < 1$, pentru orice $z \in D$ și orice $k \in \mathbb{N}$. Trecînd la limită, obținem $|f_0(z)| \leqslant 1$. Deoarece f_0 nu este constantă, conform teoremei maximului modulului, egalitatea nu poate avea loc pentru nici un punct din D, deci avem $|f_0(z)| < 1$, pentru orice $z \in D$, adică $f_0(D) \subset U$. Din cele de mai sus, rezultă că $f_0 \in \mathscr{F}$ și

$$|f_0'(z_0)| = M = \sup_{f \in \mathscr{F}} |f'(z_0)|. \tag{6.28}$$

3) Rămîne să arătăm că $f_0(D) = U$. Presupunînd că nu ar fi așa, ar exista un $\alpha \in U \setminus f_0(D)$ și alegînd $\psi \in A(U)$ definită prin

$$\psi(w) = \frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha} w}, \quad w \in U,$$

deducem că funcția olomorfă $\psi \circ f_0$ nu se anulează în D și conform cu (3.22), va exista o funcție h olomorfă pe D astfel încît $h^2 = \psi \circ f_0$. Deoarece $(\psi \circ f_0)(D) \subset U$, deducem $h(D) \subset U$. Este ușor de verificat că $h \in \mathscr{H}_u(D)$. De asemenea avem $|h(z_0)|^2 = |-\alpha| = |\alpha|$ și $2h(z_0)\, h'(z_0) = \psi'[f_0(z_0)] f_0'(z_0) = \psi'(0)\, f_0'(z_0) = (1 - |\alpha|^2)\, f_0'(z_0)$, deci

$$|h'(z_0)| = \frac{1 - |\alpha|^2}{2\sqrt{|\alpha|}} |f'(z_0)| = \frac{1 - |\alpha|^2}{2\sqrt{|\alpha|}} M.$$

Fie $\chi \in A(U)$ definită prin:

$$\chi(w) = \frac{w - h(z_0)}{1 - \overline{h(z_0)}\, w}, \quad w \in U.$$

Funcția $f = \chi \circ h$ este univalentă pe D, $f(D) \subset U$ și $f(z_0) = 0$, deci $f \in \mathscr{F}$. Pe de altă parte, avem

$$f'(z_0) = \chi'[h(z_0)]\, h'(z_0) = \frac{1}{1 - |h(z_0)|^2} h'(z_0),$$

de unde obținem

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{1 - |\alpha|} \frac{1 - |\alpha|^2}{2\sqrt{|\alpha|}} M = \frac{1 + |\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}} M.$$

Deoarece $1 + |\alpha| > 2\sqrt{|\alpha|}$, deducem $|f'(z_0)| > M$, ceea ce contrazice (6.28). Această contradicție ne arată că $f_0(D) = U$ și teorema este complet demonstrată. □

6.29. **Corolar.** *Dacă D este un domeniu simplu conex din $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$ și $z_0 \in D$, atunci există o funcție unică $f \in \mathscr{H}_u(D)$, normată cu condițiile $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 1$, care reprezintă conform domeniul D pe un disc cu centrul în origine. Raza acestui disc se numește raza conformă a domeniului D în punctul z_0.*

Demonstrație. Fie f_0 reprezentarea conformă a lui D pe U, care verifică condițiile $f_0(z_0) = 0$, $f_0'(z_0) > 0$. După cum am văzut, această reprezentare este unică. Notînd $R = \dfrac{1}{f_0'(z_0)}$ funcția $f = Rf_0$ va reprezenta conform domeniul D pe $U(0\,;R)$ şi va verifica condiţiile $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=1$. Pentru a arăta unicitatea funcţiei f, să presupunem că ar exista $f_1 \in \mathscr{H}_u(D)$, normată cu condiţiile $f_1(z_0)=0$, $f_1'(z_0)=1$, care reprezintă conform domeniul D pe un disc $U(0\,;R_1)$. Atunci funcţia $f_2 = \frac{1}{R_1} f_1$ va reprezenta conform domeniul D pe discul unitate U şi $f_2(z_0)=0$, $f_2'(z_0)>0$. Pe baza unicităţii unei astfel de reprezentări, deducem $f_2 = f_0$, adică $\frac{1}{R_1} f_1 = f_0$, deci $\frac{1}{R_1} = f_0'(z_0) = \frac{1}{R}$, de unde deducem $R_1 = R$ şi $f_1 = Rf_0 = f$. □

O altă consecinţă imediată a teoremei lui Riemann pune în evidenţă o proprietate de minim a maximului modulului. Fie D un domeniu simplu conex din $\mathbf{C}$, $D \neq \mathbf{C}$, care conţine originea şi fie $\mathscr{F} = \{f\,;\, f \in \mathscr{H}(D),\ f(0)=0,\ f'(0)=1\}$. Această mulţime nu este vidă, deoarece conţine funcţia identitate $f(z) \equiv z$. Definim pe $\mathscr{F}$ aplicaţia (funcţionala) $M : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ prin

$$M(f) = \sup_{z \in D} |f(z)|,\ f \in \mathscr{F}.$$

6.30. **Corolar.** *Marginea inferioară a funcţionalei* M *este egală cu raza conformă* R *a domeniului* D *în origine şi este atinsă pentru funcţia unică* $f_1 \in \mathscr{H}_u(D)$, *care reprezintă conform domeniul* D *pe discul* $U(0, R)$, adică

$$M(f_1) = R = \min_{f \in \mathscr{F}} M(f).$$

Demonstraţie. Fie f_0, $f_0(0)=0$, $f_0'(0)>0$, reprezentarea conformă unică a lui D pe discul unitate U şi fie $g = f_0^{-1}$. Să obsevăm că pentru a găsi marginea inferioară a lui $M(f)$ în clasa $\mathscr{F}$, este suficient să ne limităm la acele funcţii din $\mathscr{F}$ pentru care $M(f)$ este un număr finit. Vom nota $\mathscr{F}_0 = \{f\,;\, f \in \mathscr{F},\ M(f) < +\infty\}$. Fie $f \in \mathscr{F}_0$ şi să considerăm funcţia $h = \frac{1}{M(f)} f \circ g$, care este olomorfă pe U şi verifică condiţiile $h(0)=0$ şi $|h(w)|<1$, pentru orice $w \in U$. Aplicînd lema lui Schwarz, deducem $|h'(0)| \leqslant 1$, adică $M(f) \geqslant \frac{1}{f_0'(0)} = R$. Egalitatea are loc numai pentru funcţia $h(w) = cw$, $|c|=1$, adică numai în cazul cînd $M(f)\,cw = f[g(w)]$, $w \in U$. Punînd $w = f_0(z)$, $z \in D$, deducem $f(z) = cRf_0(z)$. Deoarece $f'(0)=1$, obţinem $f = f_1 = Rf_0$, care reprezintă conform domeniul D pe $U(0\,;R)$. □

6.31. *Observaţii.* 1) Din teorema lui Riemann rezultă că oricare două domenii simplu conexe din $\mathbf{C}$, diferite de $\mathbf{C}$, sînt conform echivalente. De aici rezultă că, în raport cu această relaţie (de conformitate), mulţimea tuturor domeniilor simplu conexe din $\mathbf{C}$ se împarte în două clase de echivalenţă: una din clase este formată numai din $\mathbf{C}$, iar în cealaltă clasă intră toate domeniile simplu conexe diferite de $\mathbf{C}$.

2) Dacă D este un domeniu simplu conex din $\mathbf{C}$, diferit de $\mathbf{C}$, grupul conform $A(D)$ este izomorf cu $A(U)$, în virtutea propoziţiei (6.23); toate grupurile conforme ale domeniilor simplu conexe din $\mathbf{C}$, diferite de $\mathbf{C}$, sînt izomorfe.

3) Grupul conform $A(\mathbf{C})$ este format din mulţimea transformărilor $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, unde $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. În adevăr, orice transfor-

mare de această formă este, evident, o reprezentare conformă a lui $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{C}$. Invers, fie $\mathrm{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ şi pentru $r > 0$ arbitrar ales să considerăm vecinătatea $V = \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{U}(0\,;\,r)$ a punctului ∞. Deoarece $\mathrm{f}^{-1}(\overline{U}\,(0\,;\,r)$ este compactă, rezultă că $W = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathrm{f}^{-1}(\overline{U}(0\,;\,r))$ este o vecinătate a lui ∞, iar din $\mathrm{f}(W \cap \mathbb{C}) \subset$ $\subset V$ deducem că $\lim\limits_{z\to\infty} \mathrm{f}(z) = \infty$, deci ∞ este un pol pentru funcţia întreagă f şi conform cu (4.53), f este un polinom. Dacă gradul său ar fi mai mare ca 1, atunci, conform teoremei fundamentale a algebrei, f' ar avea cel puţin un zero în $\mathbb{C}$, în contradicţie cu (6.13). Rezultă că $\mathrm{f}(z) = az + b$ cu $a \neq 0$.

5) Teorema lui Riemann, care are un caracter foarte general, se referă la *existenţa* unei reprezentări conforme. Problema *construirii* efective a unei astfel de reprezentări se poate rezolva pentru anumite clase de domenii, prin elaborarea unor metode speciale.

5) Reprezentarea conformă stabileşte o corespondenţă între punctele a două domenii. Problema corespondenţei între punctele frontieră ale acestor domenii prin reprezentarea conformă respectivă este mai dificilă. Pentru aceasta se pot consulta [6], [7] şi [24].

CAPITOLUL VII

PRELUNGIREA ANALITICĂ

Prelungirea unei funcţii $f : E \to F$ este o altă funcţie $f_1 : E_1 \to F$ astfel ca E să fie inclusă în E_1 şi $f_1 | E = f$. Dacă f aparţine unei clase de funcţii liniare, continue sau de clasă $C^{(n)}$ se caută prelungiri de aceeaşi clasă. Evident, restricţia lui f_1 la E e unică, în schimb prelungirea nu e unic determinată de supramulţimea E_1. În cazul funcţiilor olomorfe, prelungirea, dacă există este unică. Vom exploata în cele ce urmează acest fapt fundamental. În mod natural apare problema găsirii unui domeniu maxim de olomorfe. Vom constata că acest lucru în general nu e posibil, deoarece prelungirea realizată pe drumuri diferite poate da într-un punct z valori diferite pentru funcţie. Atunci putem adopta două soluţii. Sau renunţăm la noţiunea obişnuită de funcţie (tripletul $(G, \mathbb{C}, f)$) şi considerăm o „funcţie globală'' formată dintr-o mulţime de funcţii olomorfe, sau considerăm o nouă funcţie $(X, \mathbb{C}, f)$ unde $f : X \to \mathbb{C}$, dar X nu e o submulţime a planului complex ci o nouă mulţime, dotată cu o structură specială şi care va purta numele de suprafaţă riemanniană.

§ 1. PRELUNGIREA ANALITICĂ

În acest capitol vom considera mulţimea $\mathscr{H}$ a tuturor funcţiilor olomorfe definite pe domenii şi vom folosi notaţia $(f, D) \in \mathscr{H}$ în loc de $f \in \mathscr{H}(D)$.

7.1. **Definiţie.** Dacă (f_1, D_1), $(f_2, D_2) \in \mathscr{H}$, $G = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ şi $f_1 | G = f_2 | G$ atunci spunem că cele două funcţii sînt în *prelungire analitică directă* (sau pe scurt prelungire directă).

Dacă în plus $D_1 \subset D_2$ atunci spunem că (f_2, D_2) e o *prelungire olomorfă* a lui (f_1, D_1).

Din teorema identităţii rezultă că preulungirea directă e unică în sensul că dacă (g_2, D_2) şi (f_2, D_2) sînt în prelungire directă cu (f_1, D_1) atunci $f_2 = g_2$. Relaţia de prelungire directă deşi reflexivă şi simetrică nu este o relaţie de echivalenţă, deoarece dacă (f_2, D_2) prelungeşte direct pe (f_1, D_1) iar (f_3, D_3) pe (f_2, D_2) domeniile D_1 şi D_3 pot fi disjuncte sau chiar cînd intersecţia lor e nevidă ca în figura 7.1 f_1 şi f_3 pot să nu coincidă aici. Pentru a realiza înfăşurătoarea tranzitivă a acestei relaţii procedăm astfel: Două funcţii olomorfe (f, D), $(f_* D_*)$ se spun a fi în *prelungire analitică* (pe scurt în prelungire) dacă există funcțiile (f_k, D_k) $(k \in \overline{0, n})$ astfel încît să avem $(f, D) = (f_0, D_0)$, $(f_*, D_*) = (f_n, D_n)$ iar (f_{k-1}, D_{k-1}) și (f_k, D_k) să fie în prelungire directă pentru orice $k \in \overline{1, n}$. Familia $((f_k, D_k) : k \in \overline{0, n})$ se numește *lanț de prelungire*. Relația de a fi în prelungire e o relație de echivalență în $\mathscr{H}$. O clasă de echivalență $\mathbf{f}$ e formată deci din toate funcțiile olomorfe (g, E) ce prelungesc un (f, D) dat și se *numește funcție analitică globală*. Cum (g', E) va prelungi în acest caz pe (f', D) această nouă clasă se notează cu $\mathbf{f}'$ și se numește *derivata funcției globale* $\mathbf{f}$.

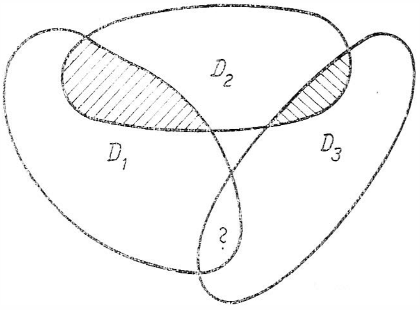


Fig. 7.1

Dacă (f_1, D_1) și (f_2, D_2) sînt în prelungire directă, putem defini o prelungire olomorfă comună: $(f, D_1 \cup D_2)$ definită prin $f(z) = f_1(z)$ dacă $z \in D_1$ și $f(z) = f_2(z)$ pentru $z \in D_2$. Dacă însă funcțiile date sînt doar în prelungire această înlocuire nu mai e în general posibilă (vezi cazul ilustrat în figură). Din acest motiv folosim noțiunea de funcție globală ca o mulțime de funcții și nu o funcție obținută prin „contopire”.

Dăm două căi de construire a prelungirilor.

7.2. Prelungire printr-o ecuație funcțională

Să considerăm funcția Γ a lui Gauss

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

unde $z \in \mathbf{C}$, iar t o variabilă reală. Se știe din analiză că această integrală e convergentă, cînd $z \in \mathbf{R}^+$. Se poate arăta că ea rămîne convergentă pentru orice $z \in \mathbf{C}$ pentru care $\mathbf{Re}\, z > 0$, deci Γ e definită pe $D_0 = \{x + iy \in \mathbf{C} : x > 0\}$ și verifică relația $\Gamma(z + 1) = z \cdot \Gamma(z)$, sau mai general $\Gamma(z + n) = z(z + 1) \dots (z + n - 1) \cdot \Gamma(z)$ pentru $z \in D_0$, adică

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n)}{z(z+1) \dots (z+n-1)}$$

Însă $\Gamma(z + n)$ e olomorfă pentru orice $z \in E_n = \{x + iy \in \mathbf{C} : x > -n\}$ deci formula

$$f_n(z) = \frac{\Gamma(z + n)}{z(z+1) \dots (z+n-1)}$$

definește pe f_n nu numai pe D_0 ci pe $D_n = E_n \setminus \{0, -1, -2, \dots, -n+1\}$, și ea coincide cu Γ pe D_0, deci valoarea $f_n(z)$ nu poate să depindă de n. Luînd pe $n \in \mathbf{N}$ suficient de mare, putem calcula valoarea prelungirii olomorfe pe orice $z \in D = \mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$

7.3. Prelungirea prin serii Taylor a fost elaborată de Weierstrass; ea e mai laborioasă, dar e universală.

Fie (f ; D) o funcţie olomorfă, $z_0 \in D$ şi γ un drum ce porneşte din z_0. Dezvoltăm f într-o serie Tayloriană în jurul lui z_0 : $S_0(z)$. Aceasta va converge într-un disc $D_0 = U(z_0\,;\, r_0)$. Alegem $t_1 \in\,]\,0,\,1]$ astfel ca $\gamma[0,t_1] \subset D_0$ şi notînd $z_1 = \gamma(t_1)$, dezvoltăm pe S_0 în jurul lui z_1 : obţinem o serie de puteri $S_1(z)$, convergentă în discul $D_1 = U\,(z_1\,;\, r_1)$. Continuăm acest procedeu : dacă $S_n(z)$ e definit într-un disc $D_n = U(z_n\,;\, r_n)$ unde $z_n = \gamma(t_n)$, alegem $t_{n+1} \in [\,t_n, 1\,]$ astfel ca $\gamma[t_n,\, t_{n+1}] \subset D_n$ şi dezvoltăm pe S_n în serie de puteri în jurul punctului $z_{n+1} = \gamma(t_{n+1})$, obţinînd $S_{n+1}(z)$ convergentă în $D_{n+1} = U\;(z_{n+1}\,;\, r_{n+1})$. Generalizăm acest procedeu.

Ideea drumului γ care „conduce" prelungirea e utilă şi o transpunem pentru o prelungire analitică oarecare.

7.4. *Completare la definiţia* (*7.1*) Vom spune că (f_*, D_*) e o prelungire a lui (f, D) *de-a lungul drumului* γ, dacă există un lanţ de prelungire $((\mathrm{f}_k, D_k) : k \in \overline{0,\, n})$ şi o diviziune $\Delta = (t_0,\, t_1,\, \ldots,\, t_n)$ a lui $[0,\,1]$ pentru care $\gamma[t_{k-1},\, t_k] \subset D_k$ pentru $k \in \overline{1,\; n}$ şi $\gamma\,(0) \in D_0$. Vom nota pe $\gamma\,(t_k)$ cu z_k.

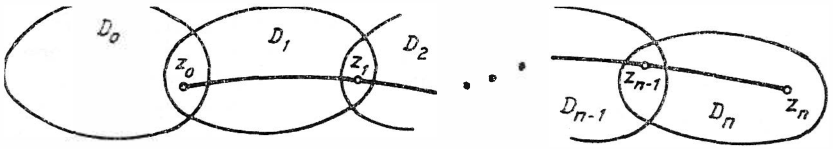


Fig. 7.4

7.5. Exemple. 1) Considerăm suma $s_1(z)$ a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ care converge în $D_1 = U(0\,;1)$ şi o prelungire de-a lungul lui $\gamma_1(t) = 2t$. Dezvoltînd pe s_1 în jurul lui $\gamma_1\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ obţinem o serie Taylor cu raza de convergenţă $R_2 = \dfrac{1}{2}$: deci $U\left(\dfrac{1}{2},\, \dfrac{1}{2}\right) \subset U(0,\,1)$ şi nu obţinem o prelungire efectivă. Nici $t = \dfrac{3}{8}$ nu dă rezultate. De-a lungul lui γ_1 nu reuşim să ieşim din D_1.

Fie $\gamma_2(t) = \lambda_1 \cup (\lambda_2 \cup\; \lambda_3)$ unde λ_1 e drumul liniar din 0 în i, λ_2 din i în 2 + i, λ_3 din 2 + i în 2. Dezvoltăm în jurul lui $z_1 = \gamma_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\mathrm{i}}{2}$ şi obţinem o serie convergentă în $U\left(\dfrac{i}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ apoi trecem la $z_2 = \gamma_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = \mathrm{i}$, $z_3 = \gamma_2\left(\dfrac{5}{8}\right) = 1+\mathrm{i}$, $z_4 = \gamma_2\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2+\mathrm{i}$, $z_5 = \gamma_2\,(1) = 2$. Obţinem astfel o serie $S_5(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ convergentă în $U\;(2,\; 1)$ şi $s_5\;(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$. (s_1, D_1) poate fi prelungit de-a lungul oricărui drum ce evită punctele 1 şi -1 ; valoarea funcţiei prelungite e în orice $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,\; 1\}$ egală cu $\dfrac{1}{1-z^2}$.

În acest caz $(s_1,\, D_1)$ are un domeniu maxim de olomorfie : $D_0 = \mathbb{C}\setminus\{-1, +1\}$ şi o prelungire olomorfă maximă f : $D_0 \to \mathbb{C}$, $\mathrm{f}(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$. Funcţia globală $\mathbf{f}$ e formată din toate restricţiile lui f la domenii $D \subset D_0$.

2) Pornim de la (f_0, D_0) unde $D_0 = \{x + iy \in \mathbf{C} : x > 0\}$ iar f_0 e o ramură uniformă a lui $\sqrt{z}$: $f_0(z) = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}\arg z}$. Prelungim de-a lungul unui drum γ ce pornește din D_0, ocolește originea și revine în z_0 : $\gamma(t) = e^{\frac{i\pi}{8}(13t+3)}$. Valorile funcției prelungite sînt de semn opus celor ale lui f_0. Cu serii de puteri procedeul merge mai lent. Putem alege lanțul de prelungire astfel : $D_1 = \left\{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : \frac{\pi}{4} < \arg z \leqslant \pi \text{ sau } -\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}\right\}$, $D_2 = \left\{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $f_1(z) = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}\arg z}$ dacă $z = x + iy \in D_1$ și $y \geqslant 0$; în schimb pentru $y < 0$ avem $f_1(z) = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2\pi)}$ iar $f_2(z) = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2\pi)}$ pentru orice $z \in D_2$. Funcția globală $\mathbf{f}$ determinată de (f, D) e generată de aplicația multivocă $\sqrt{z}$.

3) Fie $f(z) = \ln|z| + i \arg z$ considerată pe mulțimea $D = \{x + iy \in \mathbf{C} : x > 0\}$ (f este o ramură uniformă a aplicației multivoce Log). Putem prelungi (f, D) de-a lungul drumului $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ și obținem funcția (f_*, D_*) unde $D_* = D$, $f_*(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi)$. Printr-o nouă prelungire a lui (f_*, D) de-a lungul aceluiași drum γ ajungem la (f_{**}, D) unde $f_{**}(z) = f_*(z) + 2\pi i$ ș.a.m.d.

Dacă pornind de la (f, D) prelungim de-a lungul lui γ^- obținem (f^-, D) unde $f^-(z) = f(z) - 2\pi i$. Prin urmare în acest caz există o infinitate de funcții (f_n, D) distincte definite pe același D și care aparțin funcției globale $\mathbf{f}$ definită de aplicația multivocă Log. Se vede ușor că și invers, orice ramură uniformă a lui Log aparține lui $\mathbf{f}$. $\mathbf{f}$ e generată deci de aplicația multivocă Log.

4) Dacă (f, D) și (f_*, D_*) sînt în prelungire analitică și $((f_k, D_k) : k \in \overline{0, n})$ e un lanț de prelungire, atunci există un drum γ de-a lungul căruia s-a realizat prelungirea. Într-adevăr $G_k = D_{k-1} \cap D_k$ fiind nevidă alegem cîte un element $z_{k-1} \in G_k$. Dar z_{k-1}, z_k, aparținînd lui D_k va exista un drum poligonal γ_k în D_k ce le unește. Atunci drumul $\gamma = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$ va îndeplini condițiile din definiția (7.4). Drumul poligonal γ nu e însă unic în acest sens și-l putem alege într-un mod particular și anume ca toate vîrfurile drumului să fie numere complexe raționale (de forma $q_1 + q_2 i$ cu $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$). Într-adevăr fie $\varepsilon = \mathbf{d}(\{\gamma\}, \mathbf{C} \setminus \cup\{D_k : k \in \overline{1, n}\})$. Atunci $U(\{\gamma_k\}, \varepsilon) \subset D_k$, deci modificînd vîrfurile $z_{k,l}$ ale lui γ_k fără a ieși din $U(\{\gamma_k\}, \varepsilon)$ le putem înlocui cu vîrfuri raționale, și drumul poligonal modificat γ' va avea vîrfurile raționale și va rămîne drum de prelungire.

7.6. *Germeni de funcții analitice.* Să considerăm o funcție globală $\mathbf{f}$. Deși e generată de o funcție (oricare din elementele ei (f, D)) ea nu este în general o funcție, deoarece nu întotdeauna realizează o corespondență univocă. Să considerăm două elemente (f_1, D_1), $(f_2, D_2) \in \mathbf{f}$ pentru care există $z_0 \in D_1 \cap D_2$. Din exemplele (7.5.2) și (7.5.3) se vede că se poate întîmpla ca $f_1(z_0)$ să fie diferită de $f_2(z_0)$. În alte exemple apar situații în care deși $f_1(z_0) = f_2(z_0)$ dar în nici o vecinătate $U(z_0, r)$ inclusă în $D_1 \cap D_2$ cele două funcții nu coincid . Vom spune în acest caz că f_1 și f_2 coincid „întîmplător” în z_0. Să notăm cu $D_\mathbf{f}$ reunirea tuturor mulțimilor D pentru care există $(f, D) \in \mathbf{f}$. $D_\mathbf{f}$ se numește ***suportul*** funcției globale date. Dacă alegem un z_0 din suport, $\mathbf{f}$ atașează lui z_0 în general mai multe valori prin intermediul elementelor ei. Deci suportul nu corespunde ca mulțime de definiție ci fiecare element $z_0 \in D_{\mathbf{f}}$ trebuie luat în mai multe exemplare și anume considerăm toate elementele $(\mathrm{f}, D) \in \mathbf{f}$ pentru care $z_0 \in D$ și z_0 va trebui luat în atîtea exemplare cîte funcții $(\mathrm{f}, D) \in \mathbf{f}$ vor lua valori diferite în z_0 sau doar întîmplător egale. În acest sens vom înlocui punctele lui $D_{\mathbf{f}}$ cu „obiecte" (f, z) așezate „deasupra" punctului z și care se numesc *germeni de funcție analitică*. Astfel $\mathbf{f}$ care realiza inițial o aplicație multivocă pe suportul ei devine o funcție.

Acest procedeu seamănă cu cel prin care se trece de la o funcție neinjectivă $\mathrm{f} : E \to F$ la alta $\tilde{\mathrm{f}} : E \to \Gamma_{\mathrm{f}}$ injectivă unde Γ_{f} e graficul lui f; aplicația $\tilde{\mathrm{f}}(x) = (x, f(x))$ este evident injectivă. În cazul nostru însă mulțimea $D_{\mathbf{f}}$ este cea care se înlocuiește cu o nouă mulțime care devine mulțimea de definiție a lui $\mathbf{f}$ și anume suprafața riemanniană $X_{\mathbf{f}}$ a lui $\mathbf{f}$ și a cărei elemente sînt germeni.

Fie $\mathscr{H}(z_0) = \{(\mathrm{f}, D) \in \mathscr{H} : z_0 \in D\}$. Introducem în $\mathscr{H}(z_0)$ o relație de echivalență : $(\mathrm{f}_1, D_1) \sim_{z_0} (\mathrm{f}_2, D_2)$ atunci și numai atunci cînd există $r \in \mathbf{R}^+$ astfel ca $D = U\,(z_0\,; r) \subset D_1 \cap D_2$ și $\mathrm{f}_1|D = f_2|\,D$. Clasele de echivalență în care se descompune $\mathscr{H}(z_0)$ se numesc *germeni de funcții analitice* (sau pe scurt germeni) peste z_0. $\varkappa_{z_0}$ fiind aplicația canonică, $\varkappa_{z_0}(\mathrm{f}, D)$ este germenul peste z_0 din care face parte (f, D) și e format din toate funcțiile olomorfe pe un domeniu ce conține pe z_0 și coincid cu f pe cîte o vecinătate a lui z_0. Vom nota acest element cu (f, z_0). z_0 este *proiecția* lui (f, z_0) și notăm $z_0 = \mathbf{pr}\,(\mathrm{f}, z_0)$. Mulțimea tuturor germenilor (f, z) o vom nota cu X.

Dacă $(\mathrm{f}_0, z_0) \in X$, germenul are o valoare bine definită în z_0, deoarece alegînd (f_1, D_1), $(\mathrm{f}_2, D_2) \in (\mathrm{f}_0, z_0)$ avem $\mathrm{f}_1(z_0) = \mathrm{f}_2(z_0)$. Acest număr complex e *valoarea* germenului (f_0, z_0).

Introducem în X o relație de echivalență. Spunem că (f, z), (f_*, z_*) din X sînt în prelungire analitică de-a lungul unui drum γ, dacă $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = z_*$ și există două funcții olomorfe $(\mathrm{f}, D) \in (\mathrm{f}, z)$, $(\mathrm{f}_*, D_*) \in (\mathrm{f}_*, z_*)$ astfel ca (f_*, D_*) să fie o prelungire analitică a lui (f, D) de-a-lungul lui γ.

Atunci există un lanț de prelungire $((\mathrm{f}_k, D_k) : k \in \overline{0, n})$ cu $(\mathrm{f}_0, D_0) = (\mathrm{f}, D)$, $(\mathrm{f}_*, D_*) = (\mathrm{f}_n, D_n)$. Acest lanț „realizează" prelungirea. Doi germeni sînt în *prelungire analitică* dacă există un drum γ de-a lungul căruia unul să fie prelungirea celuilalt.

Relația de a fi în prelungire analitică este o relație de echivalență în X. Vom nota cu $X_{(\mathrm{f}, z)}$ clasa de echivalență din care face parte (f, z). O astfel de clasă se numește *suprafața riemanniană*.

7.7. *Observații*. 1) Germenii fiind clase de echivalență doi germeni *peste același punct* z_0 sînt fie egali, fie disjuncți.

Dar germenii (f_1, z_1) și (f_2, z_2) cu $z_1 \neq z_2$ nu sînt egali dar pot avea elemente comune. Dacă $(\mathrm{f}, D) \in (\mathrm{f}_1, z_1) \cap (\mathrm{f}_2, z_2)$ atunci (f_1, z_1) și (f_2, z_2) sînt în prelungire analitică. Mai geeral, fie (f, z) și (f_*, z_*) doi germeni în prelungire analitică iar $((\mathrm{f}_k, D_k)\,; k \in \overline{0, n})$ lanțul de funcții olomorfe ce realizează prelungirea de-a lungul drumului γ și fie $z_k = \gamma(t_k)$. Atașînd lui z_k germenul $(\mathrm{f}_k, z_k) = \varkappa_{z_k}(\mathrm{f}_k, D_k)$ — (vezi figura 7.4)) — obținem un „lanț" de germeni $(\mathrm{f}_0, z_0), \ldots, (\mathrm{f}_{k-1}, z_{k-1}), (\mathrm{f}_k, z_k) \ldots (\mathrm{f}_n, z_n)$ cu proprietatea $(\mathrm{f}_k, D_k) \in (\mathrm{f}_{k-1}, z_{k-1}) \cap (\mathrm{f}_k, z_k)$.

2) Putem alege din fiecare germen o funcție olomorfă reprezentativă. Într-adevăr, dacă (f_1, D_1), $(\mathrm{f}_2, D_2) \in (\mathrm{f}, z_0)$ atunci f_1 și f_2 vor avea aceeași dezvoltare tayloriană în jurul lui $z_0 : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Atunci, $(s, U(z_0\,; R))$

e un element particular („taylorian") din germenul (f, z_0) unde R e raza de convergență a seriei iar s suma ei. R se numește raza de convergență a germenului și germenul e univoc determinat de șirul de numere complexe $(z_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$

7.8. *Germenii unei funcții analitice globale.* Atît o funcție globală $\mathbf{f}$ cît și un germen (f, z) e o mulțime de funcții olomorfe. Două elemente (f_1, D_1), (f_2, D_2) din același germen (f, z), sînt totdeauna în prelungire.

Prin urmare, orice germen e inclus într-o funcție globală $\mathbf{f}$. Doi germeni sînt incluși în aceeași funcție globală atunci și numai atunci cînd sînt în prelungire analitică. Prin urmare mulțimea tuturor germenilor incluși în $\mathbf{f}$ formează o suprafață riemanniană pe care o vom nota cu $X_\mathbf{f}$ și aplicația $\mathbf{f} \to X_\mathbf{f}$ e o bijecție între mulțimea funcțiilor globale și cea a suprafețelor riemanniene. Putem atașa acum lui $\mathbf{f}$ o funcție $\tilde{\mathbf{f}} : X_\mathbf{f} \to \mathbf{C}$, astfel: pentru orice $(\mathrm{f}_0, z_0) \in X_\mathbf{f}$ valoarea $\tilde{\mathbf{f}}(\mathrm{f}_0, z_0)$ va fi prin definiție valoarea germenului (vezi (7.6)) adică alegem $(\mathrm{f}_1, D_1) \in (\mathrm{f}_0, z_0)$ arbitrar și $\tilde{\mathbf{f}}(\mathrm{f}_0, z_0) = \mathrm{f}_1(z_0)$. Astfel i-am atașat fiecărei funcții globale $\mathbf{f}$ o funcție definită pe suprafața riemanniană $X_\mathbf{f}$.

Fie $\mathbf{f}$ o funcție globală și $(\mathrm{f}, z) \subset \mathbf{f}$ și alegem un drum γ din $\mathbf{C}$ cu $\gamma(0) = z$. Dacă germenul poate fi prelungit de-alungul lui γ, obținem un alt germen inclus în $\mathbf{f}$, deci un alt punct al suprafeței riemanniene $X_\mathbf{f}$.

În caz contrar să urmărim ce impiedică realizarea prelungirii. Fie γ un drum de-a lungul căruia (f_0, z_0) nu se poate prelungi și notăm cu γ_{t_0} drumul γ parcurs numai pînă la t_0, adică $\gamma_{t_0}(t) = \gamma\,(t \cdot t_0)$. Mulțimea acelor valori $t_0 \in [0,1]$ pentru care (f_0, z_0) poate fi prelungit de-a lungul lui γ_{t_0} e de forma $[0, t_*[$ cu $0 < t_*$. Într-adevăr, dacă putem prelungi după γ_{t_0} atunci fie (f, z) germenul obținut. Evident, $z = \gamma_{t_0}(1) = \gamma(t_0)$. Dacă (f, D) e o funcție olomorfă din germenul (f, z), atunci există un $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ astfel încît pentru $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon\ [$ să avem $\gamma(t) \in D$ și atunci (f, z) poate fi prelungit pe porțiunea dintre t_0 și t de pe drumul γ, deci (f_0, z_0) poate fi prelungit pe γ pînă la t.

Deci pe γ se poate prelungi pînă la orice $t \in [0, t_*[$ dar pînă la t_* nu mai e posibil — (vezi și exemplul (7.5.1)). Vom spune in acest caz că $z_* = \gamma\,(t_*)$ este *un punct singular al funcției globale* $\mathbf{f}$ *dacă se pornește de la germenul* (f_0, z_0) *de-a lungul lui* γ. Trebuie subliniat că dîndu-se un punct $z_* \in \mathbf{C}$ nu se poate pune întrebarea dacă punctul este sau nu singular pentru $\mathbf{f}$ deoarece singularitatea depinde și de drumul γ și de germenul de pornire (f_0, z_0) cu $(z_0 = \gamma(0))$, z_* poate fi singular pe un drum, iar pe altul nu.

Vom urmări acum problema unicității germenilor obținuți dintr-un germen dat prin prelungire. Vom constata că această unicitate e asigurată dacă se prelungește de-a lungul unui drum dat (vezi (7.9) și (7.13)) și chiar dacă avem două drumuri de prelungire dar acestea sînt omotope într-un anumit domeniu.

7.9. **Teorema unicității prelungirii.** *Pentru un germen* (f_0, z_0) *și un drum dat* γ *din* $\mathbf{C}$ *există cel mult un germen* (f_*, z_*) *prelungire a lui* (f_0, z_0) *de-a lungul lui* γ.

Demonstrație. Fie (f_0, D_0), (f_1, D_1), $\ldots$ (f_n, D_n) și $(\hat{\mathrm{f}}_0, \hat{D}_0), \ldots, (\hat{\mathrm{f}}_{\hat{n}}, \hat{D}_{\hat{n}})$ două lanțuri ce realizează cîte o prelungire a lui (f_0, z_0) de-a lungul lui γ pînă la germenii (f_*, z_*) respectiv $(\hat{\mathrm{f}}_*, z_*)$ și să presupunem, prin absurd, că $(\mathrm{f}_*, z_*) \neq (\hat{\mathrm{f}}_*, z_*)$.

Avînd $\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset D_k$, definim pentru orice $t \in [t_{k-1}, t_k)$ elementul $(\mathrm{f}_t, \gamma(t)) = \varkappa_{\gamma(t)}(\mathrm{f}_k, D_k)$ și în mod analog pentru diviziunea corespunzătoare celui de al doilea lanț $\gamma[\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k] \subset \hat{D}_k$ și pentru $t \in [\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k]$ definim $(\hat{\mathrm{f}}_t, \gamma(t)) = \varkappa_{\gamma(t)}(\hat{\mathrm{f}}_k, \hat{D}_k)$. Avem $(\mathrm{f}_0, \gamma(0)) = (\hat{\mathrm{f}}_0, \gamma(0)) = (\mathrm{f}_0, z_0)$, $(\mathrm{f}_1, \gamma(1)) = (\mathrm{f}_*, z_*) \neq (\hat{\mathrm{f}}_*, z_*) = (\hat{\mathrm{f}}_1, \gamma(1))$ și din $\mathrm{f}_k | G_k = \mathrm{f}_{k-1} | G_k$ unde $G_k = D_{k-1} \cap D_k$ rezultă că $(\mathrm{f}_t, \gamma(t))$ și $(\hat{\mathrm{f}}_t, \gamma(t))$ sînt univoc definite. Notăm $M_0 = \{t \in [0, 1] : (\mathrm{f}_t, \gamma(t)) = (\hat{\mathrm{f}}_t, \gamma(t))\}$. $M_1 = [0,1] \setminus M_0$. Avem $0 \in M_0$, $1 \in M_1$ și vom arăta că M_0 și M_1, sînt deschise în $[0,1]$ în contradicție cu conexitatea acestui interval.

Pentru orice $t_0 \in [0,1]$ există k, j astfel ca $t_0 \in [t_{k-1}, t_k] \cap [\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j]$.

Fie $t_0 \in M_0$, adică $(\mathrm{f}_{t_0}, \gamma(t_0)) = (\hat{\mathrm{f}}_{t_0}, \gamma(t_0))$. După (7.6), funcțiile (f_k, D_k) și $(\hat{\mathrm{f}}_j, \hat{D}_j)$ coincid într-o vecinătate D a lui $\gamma(t_0)$, deci va exista $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ astfel ca pentru $t \in \,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\, \cap [0,1]$ să avem $\gamma(t) \in D$ și atunci $(\mathrm{f}_t, \gamma(t)) = (\hat{\mathrm{f}}_t, \gamma(t))$, adică $]\,t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon\,[\, \cap [0,1] \subset M_0$. M_0 e deschis.

Dacă $t_0 \in M_1$, atunci $(\hat{\mathrm{f}}_{t_0}, \gamma(t_0)) \neq (\hat{\mathrm{f}}_{t_0}, \gamma(t_0))$, adică (f_k, D_k) și $(\hat{\mathrm{f}}_j, \hat{D}_j)$ nu coincid în nici o vecinătate a lui $z_0 = \gamma(t_0)$. Zerourile lui $\mathrm{f}_k - \hat{\mathrm{f}}_j$ fiind izolate, va exista o vecinătate punctată $V \setminus \{z_0\}$ a lui z_0 inclusă în $D_k \cap \hat{D}_j$ în care $\mathrm{f}_k(z) \neq \hat{\mathrm{f}}_j(z)$ și dacă $t \in \,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\, \cap [0,1]$ implică $\gamma(t) \in V$, vom avea $(\mathrm{f}_t, \gamma(t)) \neq (\hat{\mathrm{f}}_t, \gamma(t))$, M_1 e deschisă.

7.10. **Corolar.** *Fie* (f, D) *o funcție olomorfă,* $z_0, z_1 \in D$, $(\mathrm{f}, z_0) = \varkappa_{z_0}(\mathrm{f}, D)$, γ *un drum din* D *ce leagă* z_0 *de* z_1. *Atunci* (f, z), *poate fi prelungit după* γ *la un germen* (f_1, z_1), *și acesta coincide cu* $\varkappa_{z_1}(\mathrm{f}, D)$.

Într-adevăr, (f, D) singură formează un lanț de prelungire a lui $\varkappa_{z_0}(\mathrm{f}, D)$ la $\varkappa_{z_1}(\mathrm{f}, D)$.

7.11. **Corolar.** (*Poincaré*). *Fie* (f_0, z_0) *un germen și* z_1 *un punct oarecare al planului* $\mathbf{C}$. *Mulțimea germenilor peste* z_1 *ce sînt în prelungire cu* (f_0, z_0) *e cel mult numărabilă.*

Demonstrație. De-a lungul unui drum γ ce leagă $\gamma(0) = z_0$ de $\gamma(1) = z_1$, prelungirea e unică. Dacă însă $(\mathrm{f}_k, D_k) : k \in \overline{0, n})$ e lanțul de prelungire ce realizează această prelungire putem trece cum am constatat la (7.5.4), la un alt drum poligonal γ_1 cu vîrfurile diferite de $\gamma(0)$ și $\gamma(1)$ raționale de-a lungul căruia obținem aceeași prelungire ca după γ.

Deci, orice prelungire poate fi realizată prin drumuri poligonale cu vîrfurile intermediare raționale. Mulțimea acestora e numărabilă.

7.12. *Domenii de prelungire.* Am văzut la (7.10), că dacă $(\mathrm{f}, D) \in (\mathrm{f}, z)$ atunci oricare ar fi drumul γ din D ce pornește din z, (f, z) poate fi prelungit de-a lungul lui γ. Să considerăm acum funcția (f_0, D_0) din exemplul (7.5.2) și construim germenul $(\mathrm{f}, 1) = \varkappa_1(\mathrm{f}, D)$ format din toate funcțiile olomorfe (f_1, D_1) pentru care $1 \in D_1$ și într-o vecinătate a lui 1, f_1 coincide cu $\mathrm{f}_0(z) = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}\arg z}$. Notînd cu D pe $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, oricare ar fi drumul γ din D cu $\gamma(0) = 1$, germenul $(\mathrm{f}, 1)$ poate fi prelungit de-a lungul lui γ. Totuși acest domeniu D nu e domeniu de olomorfie pentru nici un element al germenului dat.

Fie $(\mathrm{f}_0, z_0) \in X$ un germen oarecare. Printr-un *domeniu de prelungire* pentru (f_0, z_0) înțelegem un domeniu D din $\mathbf{C}$ astfel ca $z_0 \in D$ și pentru orice drum γ din D ce pornește din z_0 germenul poate fi prelungit de-a lungul lui γ.

De exemplu, oricare ar fi $(\mathrm{f}_0, D_0) \in (\mathrm{f}_0, z_0)$, D_0 este domeniu de prelungire (vezi 7.10).

Dacă γ_0, γ_1 sînt două drumuri dintr-un domeniu de prelungire, cu același punct final, prelungirile de-a lungul lor vor fi posibile, dar rezultatele pot fi diferite. În acest sens avem însă următorul rezultat fundamental.

7.13. **Teorema monodromiei.** *Dacă D e un domeniu de prelungire pentru germenul (f_0, z_0) și γ_0, γ_1 sînt două drumuri omotope în D, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, atunci germenii obținuți prin prelungire de-a lungul celor două drumuri sînt egali.*

Demonstrație. 1) Fie $\varphi : [0,1]^2 \to D$ deformația lui γ_0 în γ_1. Notînd $\gamma_s(t) = \varphi(t, s)$, vom arăta că pentru orice $s \in [0,1]$ există $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ astfel ca pentru orice $s' \in [0,1]$ cu $|s-s'| < \varepsilon$, prelungirile lui (f_0, z_0) după γ_s și $\gamma_{s'}$ dau același rezultat. Fie $(\mathrm{f}_0, D_0), (\mathrm{f}_1, D_1), \ldots, (\mathrm{f}_n, D_n)$ lanțul ce prelungește de-a lungul lui γ_s pe (f_0, z_0) și $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ diviziunea corespunzătoare. Notăm $\eta_k = \mathbf{d}\,(\gamma_s[t_{k-1}, t_k],)\, D_k))$ și $\eta = \min\{\eta_k : k \in \overline{1, n}\}$. Avînd $\eta \in \mathbf{R}^+$ și φ fiind uniform continuă va exista $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ astfel ca $|s-s'| < \varepsilon$ să implice $|\varphi(t, s) - \varphi(t, s')| < \eta$ adică $\mathbf{d}(\gamma_s(t), \gamma_{s'}(t)) < \eta_k$ pentru $t \in [t_{k-1}, t_k]$ de unde rezultă că $\gamma_{s'}(t) \in D_k$ și lanțul dat de funcții e o prelungire și de-a lungul lui $\gamma_{s'}$ și din cauza unicității prelungirii, pe γ_s și γ_s, obținem aceeași prelungire.

2) Să presupunem prin absurd că prelungirile de-a lungul lui γ_0 și γ_1 dau rezultate diferite și fie M_0 mulțimea acelor valori $s \in [0,1]$ pentru care prelungirea după γ_s coincide cu cea de-a lungul lui γ_0, iar $M_1 = [0,1] \setminus M_0$. Proprietatea demonstrată la 1) arată că M_1 și M_0 sînt deschise în $[0,1]$ și $0 \in M_0$, $1 \in M_1$, deci $[0,1]$ nu ar fi conexă.

§ 2. SUPRAFEȚE RIEMANNIENE

7.14. Am definit relații de prelungire analitică la două nivele: în mulțimea $\mathscr{H}$ a tuturor funcțiilor olomorfe (f, D) unde clasele de echivalență sînt funcțiile analitice globale și la nivelul germenilor unde clasele de echivalență defineau suprafețele riemanniene. Cele două noțiuni erau în mod natural legate între ele: oricărei funcții globale $\mathbf{f}$ i-am atașat biunivoc o suprafață riemanniană $X_{\mathbf{f}}$.

Spre deosebire de relația de prelungire care contopește funcțiile olomorfe respectiv germenii într-o unitate organică mare, avînd rol de globalizare, relația $\sim_{z_0}$ folosită la definirea germenilor are un rol de localizare concentrînd efectul unei funcții olomorfe în jurul unui punct ales z_0.

Trebuie subliniat însă că noțiunea dată pînă aici ca suprafață riemanniană este încă incompletă. Într-adevăr, pentru a putea analiza comportarea funcției $\mathbf{f} : X_{\mathbf{f}} \to \mathbf{C}$ (continuitate, derivabilitate etc.) e necesar a înzestra mulțimea $X_{\mathbf{f}}$ cu o structură topologică și de varietate diferențiabilă, și ele împreună formează suprafața riemanniană.

Cum $X_{\mathbf{f}}$ e o clasă de germeni, e util să atașăm fiecărui $(\mathrm{f}, D) \in \mathscr{H}$ o mulțime de germeni astfel: $D_{\mathrm{f}} = \{\varkappa_z(\mathrm{f}, D) : z \in D\}$. Dacă (f, D) aparține lui $\mathbf{f}$ atunci $D_f \subset X_{\mathbf{f}}$.

7.15. **Propoziție.** (*Topologia suprafeței riemanniene*). *Fie $\mathbf{f}$ o funcție analitică globală. Mulțimea τ formată din reuniri de mulțimi din familia $\mathscr{B} = \{D_f : (\mathrm{f}, D) \in \mathbf{f}\}$ formează o topologie de spațiu Hausdorff în $X_{\mathbf{f}}$*

Demonstrație. 1) Conform definiției (7.11) $(\mathrm{f}, z) \in X_{\mathfrak{f}}$ are loc atunci și numai atunci cînd $(\mathrm{f}, z) \subset \mathfrak{f}$ adică există $(\mathrm{f}, D) \in \mathfrak{f}$ cu $z \in D$ și $\varkappa_z(\mathrm{f}, D) = (\mathrm{f}, z)$, adică $\cup \{D_{\mathfrak{f}} \in \mathscr{B}\} = X_{\mathfrak{f}}$. Deci $X_{\mathfrak{f}}$ și în mod banal și $\emptyset$ aparțin lui τ.

2) Dacă $G_1, G_2 \in \tau$ atunci $G_1 = \cup\{B_i : i \in I\}$, $G_2 = \cup\{B_j : j \in J\}$ cu $B_i, B_j \in \mathscr{B}$ prin urmare $G_1 \cap G_2 = \cup \{B_i \cap B_j : (i, j) \in I \times J\}$. Pentru a arăta că $G_1 \cap G_2 \in \tau$, adică $G_1 \cap G_2$ e o reunire de mulțimi din $\mathscr{B}$ e suficient a arăta că pentru orice $B_i, B_j \in \mathscr{B}$ și $(\mathrm{f}, z) \in B_i \cap B_j$ există $B \in \mathscr{B}$ astfel încît $(\mathrm{f}, z) \in B \subset B_i \cap B_j$. Fie deci $B_i = D_{\mathfrak{f}}$, $B_j = \tilde{D}_{\tilde{f}}$ unde $(\mathrm{f}, \mathscr{B}), (\tilde{\mathrm{f}}, \tilde{D}) \in \mathfrak{f}$. Cum $(\mathrm{f}, z) \in D_f \cap \tilde{D}_{\tilde{\mathrm{f}}}$, avem $z \in D \cap \check{D}$ și $(\mathrm{f}, D) \sim_z (\tilde{\mathrm{f}}, \tilde{D})$ deci există $\hat{D} = U(z; r)$ astfel ca $\mathrm{f}|\hat{D} = \tilde{\mathrm{f}}|\hat{D}$ și notînd cu $\hat{\mathrm{f}}$ această restricție vom avea $(\mathrm{f}, z) \in \hat{D}_{\tilde{\mathrm{f}}} \subset D_{\mathfrak{f}} \cap \tilde{D}_{\tilde{\mathrm{f}}}$. Deci $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

3) Din definiția lui τ rezultă imediat că $\underset{i \in I}{\forall} G_i \in \tau$ implică $\cup\{G_i : i \in I\} \in \tau$.

4) Să arătăm că spațiul verifică axioma lui Hausdorff. Fie (f_1, z_1), (f_2, z_2) elemente distincte din $X_{\mathfrak{f}}$.

a) Dacă $z_1 \neq z_2$ și $\varepsilon = |z_1 - z_2|$ alegem cîte un element arbitrar din cei doi germeni $(\mathrm{f}_1, D_1) \in (\mathrm{f}_1, z_1)$, $(\mathrm{f}_2, D_2) \in (\mathrm{f}_2, z_2)$. Avînd $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$, va exista $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbf{R}_+^*$ astfel ca $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$ și $\tilde{D}_k = U(z_k, \varepsilon_k) \subset D_k$ $(k \in \overline{1,2})$ și notînd $\tilde{\mathrm{f}}_k = \mathrm{f}_k | \tilde{D}_k$ vom avea $(\tilde{\mathrm{f}}_k, \tilde{D}_k) \in (\mathrm{f}_k, z_k)$ și din $\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 = \emptyset$ rezultă

$$(\tilde{D}_1)_{\tilde{f}_1} \cap (\tilde{D}_2)_{\tilde{f}_2} = \emptyset .$$

Am găsit două vecinătăți disjuncte pentru germenii aleși.

6) Dacă $z_1 = z_2$, atunci (f_1, z_1) și (f_2, z_2) vor fi disjuncte — (7.7.1)—. Alegem $(\mathrm{f}_k, D_k) \in (\mathrm{f}_k, z_k)$; va exista $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ astfel ca $\tilde{D} = U(z_1; \varepsilon) \subset D_1 \cap D_2$ și notînd $\tilde{\mathrm{f}}_k = \mathrm{f}_k | \tilde{D}$ vom avea $(\tilde{\mathrm{f}}_k, \tilde{D}) \in (\mathrm{f}_k, z_k)$. Atunci însă $(\tilde{D})_{\tilde{\mathrm{f}}_1}$ și $(\tilde{D})_{\tilde{\mathrm{f}}_2}$ sînt vecinătăți disjuncte ale germenilor (f_1, z_1) respectiv (f_2, z_2) deoarece din $(\mathrm{f}, z) \in (\tilde{D})_{\tilde{\mathrm{f}}_1} \cap (\tilde{D})_{\tilde{\mathrm{f}}_2}$ ar rezulta $(\tilde{\mathrm{f}}_k, \tilde{D}) \in (\mathrm{f}, z)$, deci $(\tilde{\mathrm{f}}_1, \tilde{D})$ și (f_2, D) coincid pe vecinătatea lui $z \in D$. Atunci, însă, $(\mathrm{f}_1, D) = (\mathrm{f}_2, D)$ și germenii dați n-ar fi disjuncți.

Structura topologică din $X_{\mathfrak{f}}$ permite definirea continuității unei aplicații $\mathrm{F} : X_{\mathfrak{f}} \to \mathbf{C}$. Pentru a putea vorbi de diferențiabilitate avem nevoie însă de o structură suplimentară pe suprafața riemanniană. Această structură va fi realizată prin transportarea structurii de corp din $\mathbf{C}$ pe $X_{\mathfrak{f}}$. Acest transport e realizat cu ajutorul operației de proiecție $\mathbf{pr} : X_{\mathfrak{f}} \to \mathbf{C}$, dar vom avea nevoie și de inversa ei. Proiecția nefiind injectivă, va trebui să folosim o restricție de a ei.

7.16. **Propoziție.** *Fie* $(X_{\mathfrak{f}}, \tau)$ *o suprafață riemanniană și* $(\mathrm{f}, D) \in \mathfrak{f}$. *Restricția proiecției la mulțimea* $D_{\mathfrak{f}}$ *e un omeomorfism între* $D_{\mathfrak{f}}$ *și* D. *Prin urmare* $(X_{\mathfrak{f}}, \tau)$ *e local compact și conex prin arce.*

Demonstrație. 1) Evident, fiecărui $z \in D$ îi corespunde exact un germen $(\mathrm{f}, z) \in D_{\mathfrak{f}}$ al cărui proiecție e z, deci $\mathrm{p} = \mathbf{pr}\, |D_{\mathfrak{f}}$ este o bijecție între $D_{\mathfrak{f}}$ și D.

2) p e continuă. Fie G o parte deschisă din D, deci și în $\mathbf{C}$. Componentele ei vor fi domenii: $G = \cup \{D_j : j \in I\}$ deci $\mathbf{pr}^{-1} G = \cup \{\mathbf{pr}^{-1} D_j : j \in I\}$. Dar $\mathbf{pr}^{-1} D_j$ e deschisă în $X_{\mathfrak{f}}$, deoarece notînd cu f_j restricția lui f la D_j, avem $(\mathrm{f}_j, D_j) \in X_{\mathfrak{f}}$ și $\mathbf{pr}^{-1} D_j = (D_j)_{\mathrm{f}_j} \in \mathscr{B}$. Prin urmare $\mathbf{pr}^{-1} G \in \tau$.

3) p e deschisă. E suficient să arătăm că dacă $B \in \mathscr{B}$, atunci $\mathbf{pr}(B \cap D_{\mathfrak{f}})$ e euclidian deschis. Fie $B = \tilde{D}_{\tilde{\mathfrak{f}}}$ și $z_1 \in \mathbf{pr}(\tilde{D}_{\tilde{\mathfrak{f}}} \cap D_{\mathfrak{f}})$. Va exista deci $(\mathfrak{f}_1, z_1) \in \tilde{D}_f \cap D_f$; dar atunci $z_1 \in D \cap \tilde{D}$ și pentru un $\hat{D} = U(z_1; r_1)$ convenabil vom avea $\hat{D} \subset D \cap \tilde{D}$ iar $\mathfrak{f} \,|\, \hat{D} = \tilde{\mathfrak{f}} \,|\, \hat{D}$. Notînd cu $\hat{\mathfrak{f}}$ această restricție vom avea în mod evident $\varkappa_{\hat{z}}(\hat{\mathfrak{f}}, \hat{D}) = \varkappa_{\hat{z}}(\mathfrak{f}, D) = \varkappa_{\hat{z}}(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{D})$ pentru orice $\hat{z} \in \hat{D}$. Acest germen $(\hat{\mathfrak{f}}, \hat{z})$ aparține deci atît lui $D_{\mathfrak{f}}$ cît și lui $\tilde{D}_{\tilde{\mathfrak{f}}}$ și atunci $\hat{z} \in \mathbf{pr}\,(\tilde{D}_{\tilde{\mathfrak{f}}} \cap D_{\mathfrak{f}})$ deci $\hat{D}$ e inclus în această proiecție ceea ce demonstrează că $\mathbf{pr}\,(\tilde{D}_{\tilde{\mathfrak{f}}} \cap D_{\mathfrak{f}})$ e deschisă.

4) Mulțimea D e local compactă în topologia planului complex, deci și D_f e local compact, prin urmare întregul spațiu $(X_{\mathfrak{f}}, \tau)$ de asemeni.

5) Fie $(\mathfrak{f}, z), (\mathfrak{f}_*, z_*)$ două elemente arbitrare ale suprafeței riemanniene $X_{\mathfrak{f}}$. Ele fiind în prelungire, va exista un lanț de prelungire $((\mathfrak{f}_k, D_k) : k \in \overline{0, n}$ un drum γ și o diviziune $\Delta = (t_0, t_1 \ldots t_n)$ pentru care $t \in [t_{k-1}, t_k]$ implică $\gamma(t) \in D_k$. Considerăm acum descompunerea $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ a drumului γ după diviziunea Δ. Vom avea $\{\gamma_k\} \subset D_k$, $\gamma_1(0) = z$, $\gamma_n(1) = z_*$. Proiecția fiind un omeomorfism între $(D_k)_{\mathfrak{f}_k}$ și D_k, $\tilde{\gamma}_k = \mathbf{pr}^{-1} \circ \gamma_k$ va fi un drum din $(D_k)_{\mathfrak{f}_k}$, și există drumul $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\gamma}_n$ cu $\{\tilde{\gamma}\} \subset X_{\mathfrak{f}}$, $\tilde{\gamma}(0) = (\mathfrak{f}, z)$, $\tilde{\gamma}(1) = (\mathfrak{f}_*, z_*)$ și $X_{\mathfrak{f}}$ e conex prin arce. Operația de trecere de la γ_k din plan la drumul $\tilde{\gamma}_k$ de pe suprafața riemanniană (mai precis pe ramura ei $(D_k)_{\mathfrak{f}_k}$ se numește „ridicare".

7.17. *Observații*. 1) În teoria varietăților diferențiabile printr-o *hartă* se înțelege o aplicație omeomorfă a unei părți deschise G dintr-un spațiu topologic (X, τ) pe o parte deschisă din planul complex, iar o mulțime $\mathscr{B} = \{G_i : i \in I\}$ de hărți cu proprietatea $\cup \{G_i : i \in I\} = X$ se numește *atlas*.

Aplicația $\mathbf{pr}$ definește după cum am văzut un atlas pe suprafața riemanniană $X_{\mathfrak{f}}$ și $\mathscr{B} = \{D_f : (\mathfrak{f}, D) \in \mathfrak{f}\}$ e mulțimea hărților.

2) Din (7.11) deducem că o suprafață riemanniană are cel mult o mulțime numărabilă de „foi" adică elemente cu aceeași proiecție.

3) Se pot defini și suprafețe riemanniene compacte adăugînd spațiilor construite din germeni elemente improprii: poli, puncte de ramificație.

4) Suprafețele riemanniene pot fi intuite și ca suprafețe scufundate în $\mathbf{R}^3$. Fiecărui $z \in \mathbf{C}$ îi suprapunem vertical atîtea puncte cîte elemente distincte se obțin peste z prin prelungire și legăm între ele aceste puncte, care sînt în „continuare" în sensul topologiei. La exemplul (7.5.2), vom ajunge la suprafața din figură, obținută prin tăierea de-alungul semidreptei OA a două exemplare din $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ și lipirea muchiilor opuse. Dreapta OA e în R^3 comună, dar pe suprafața riemanniană aceste puncte trebuie considerate dublu.

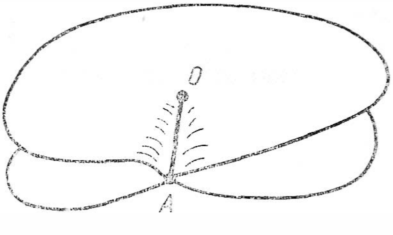


Fig. 7.17.4

7.18. *Funcții pe suprafața riemanniană*. Dacă $X_{\mathfrak{f}}$ e suprafața riemanniană a funcției globale $\mathfrak{f}$, atunci acesteia i-am atașat o funcție $\tilde{\mathfrak{f}} : X_{\mathfrak{f}} \to \mathbf{C}$. Există și alte funcții complexe definite pe suprafața riemanniană $X_{\mathfrak{f}}$. Putem atașa de exemplu unei alte funcții globale $\mathfrak{g}$ o funcție din $X_{\mathfrak{f}}$ în $\mathbf{C}$ dacă ea îndeplinește următoarea condiție: există o aplicație continuă $\sigma : X_{\mathfrak{f}} \to X_{\mathfrak{g}}$ care conservă proiecțiile, adică pentru orice $(\mathrm{f}, z) \in X_{\mathfrak{f}}$ să avem $\mathbf{pr}\ \sigma(\mathrm{f}, z) = z$. În acest caz spunem că $\mathfrak{f}$ e *subordonat* lui $\mathfrak{g}$ și atașăm lui $\mathfrak{g}$ următoarea funcție $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{f}} : X_{\mathfrak{f}} \to \mathfrak{C}$ definită de $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{f}} = \tilde{\mathfrak{g}} \circ \sigma$. În acest caz vor exista și funcțiile $\tilde{\mathfrak{f}} + \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{f}}$, $\mathfrak{f} \cdot \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{f}}$ din $X_{\mathfrak{f}}$ în $\mathfrak{C}$.

De exemplu, $\mathfrak{f}$ e subordonată oricărei funcții globale întregi $\mathfrak{h}$ (adică $\mathfrak{h}$ admite un element $(\mathrm{h}, \mathfrak{C})$ și atunci $\mathfrak{h}$ e format din restricțiile lui h la diferitele domenii din $\mathfrak{C}$). Într-adevăr, $X_{\mathfrak{h}}$ va fi evident omeomorf cu planul $\mathfrak{C}$ și dacă îl identificăm chiar cu $\mathfrak{C}$, atunci $\sigma = \mathbf{pr}$ va fi funcția de subordonare. Deci σ e unic determinată.

Fie acum $\mathfrak{f}$ funcția globală generată de aplicația multivocă Log și $\mathfrak{g}$ cea generată de $\sqrt{z}$. $\mathfrak{f}$ e subordonată lui $\mathfrak{g}$ dar σ poate fi ales în două feluri. Fie $(\mathrm{f}, z) \in \mathfrak{f}$, prin urmare $z \neq 0$ și valoarea germenului în z este $\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$. Atunci $\sigma(\mathrm{f}, z)$ va fi de exemplu acel germen (g, z) pentru care valoarea lui (g, z) în z este $\sqrt{|z|}\ e^{\frac{i}{2} \cdot \arg z}$ dacă k e par. Dacă k e impar alegem germenul cu valoarea $\sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2\pi)}$. (Sau invers)

Funcția globală generată de $\sqrt[4]{z}$ e subordonată celei generate de $\sqrt{z}$, dar nu e subordonată funcției globale generată de $\sqrt[3]{z}$.

Fie acum X o suprafață riemanniană, iar F o aplicație oarecare definită pe X cu valori în $\mathfrak{C}$. O astfel de funcție se spune a fi *analitică* dacă pentru orice $(\mathrm{f}, z) \in X$ și orice $(\mathrm{f}, D) \in (\mathrm{f}, z)$ funcția $\mathrm{F} \circ \mathrm{p}^{-1} : D \to \mathfrak{C}$ e derivabilă în z (am notat cu p restricția proiecției la D_{f}). Se vede imediat că F fiind analitică e și continuă, iar dacă X e suprafața riemanniană a unei funcții întregi, atunci F e analitică dacă și numai dacă e o funcție întreagă.

Se verifică ușor că dacă $\mathfrak{f}$ e subordonată lui $\mathfrak{g}$ atunci $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{f}}$ e o funcție analitică pe $X_{\mathfrak{f}}$.

INDEX

A

aplicaţie local constantă . . .3.23.
aplicaţie logaritmică . . . . .2.85.
argumentul unui număr complex . . . . .1.16. 1.25.
atlas . . . . .7.17. 1.
automorfism conform . . . .6.21.

B

biraportul a patru numere . . .2.69

C

calcularea reziduului într-un pol 5.3.
cercul lui Kasner . . . . . .2.92.
coeficienţii Laurent . . . . .4.29.
coeficienţii Taylor 4.11
comportarea la ∞ . . . . . .4.53.
compunerea a două drumuri . .2.9
conform echivalente (domenii) .6.21.
conjugatul unui număr complex . . . . .1.6.
contur . . . . .3.1.
convergenţa în sens Cauchy . 5.7.
convergenţa uniformă pe compacte . . . . .4.1.
coroană circulară . . . . . .1.36.
coroană de convergenţă . . . .4.29.
corp valuat . . . . .1.9.
criteriu de convergentă uniformă. 4.5.
criteriul lui Cauchy-Riemann
de eliminabilitate . . . . .4.43.
curbă 2.22

D

deformaţie continuă . . . . .2.7.
diferenţiala exterioară . . . .3.39.
disc . . . . .1.36.
disc de convergenţă . . . . .4.8.
discul unitate . . . . . . .6.24.
distanţa cordală . . . . . . .1.48.
distanţa între două mulţimi . .1.36.
divizibilitate . . . . .5.19.
domeniu . . . . .1.36.
domeniu convex . . . . . . .1.36.
domeniu simplu conex . . . .2.20.
domeniu de prelungire . . . .7.12.
domeniu stelat . . . . . . .1.36.
drum . . . . .2.7.
drumuri echivalente . . . 2.22.
drumuri omotope . . . . . .2.7.
drum poligonal. . . . . . . .2.18.
drum rectificabil . . . . . . .3.1.
drum triunghiular . . . . . .3.11.5.

E

echicontinuă . . . . .6.1.

F

formă diferenţială . . . . .3.39.
formă diferenţială exactă . . .3.46.
formă diferenţială închisă . . .3.47.
formă diferenţială local exactă 3.47.
formulele lui Cauchy . . . . 3.25.
formulele lui Cauchy pentru disc . . . . .3.19.
formula lui Cauchy-Hadamard 4.8.
formula lui Poisson . . . . .3.32.
formula lui Schwarz . . . . . . 3.35.
formulele integrale ale lui Pompeiu . . . . .3.62.
funcţie analitică . . . . . . .4.13.
funcţie analitică globală . . .7.11
funcţie armonică . . . . . .3.26.
funcţie armonică conjugată . .3.27.1
funcţie derivabilă . . . . . .2.28.
funcţie diferenţiabilă . . . . .2.26, 2.45.
funcţie dezvoltabilă în serie Taylor . . . . .4.13.
funcţie elementară . . . . . .2.87.
funcţie exponenţială . . . . .2.53.
funcţie globală . . . . . . .7.1.
funcţie generată de o aplicaţie multivocă . . . . .7.5.
funcţie întreagă , ...2.44, 4.53.
funcţie local constantă . . . .3.23, 7.18.
funcţie olomorfă . . . . . .2.44.
funcţie raţională . . . . . .4.56.
funcţie subordonată . . . . .7.18.
funcţie trigonometrică . . . .2.61.
funcţie trigonometrică hiperbolică . . . . .2.64.
funcţie univalentă . . . . . .6.11.

G

germeni de funcţii analitice 7.6.
generalizări ale teoremei lui Cauchy . . . . .3.60.
grup conform . . . . .6.21.

H

hartă . . . . 1.41,7.17.1.

I

index . . . . .3.23.
inegalităţile lui Cauchy . . . .3.28.
inegalitatea triunghiului . . .1.8.
integrala complexă . . . . .3.6.
integrala pe un drum de clasa C^1 3.40.
integrale de tip Cauchy . . . .3.18.
integralele lui Fresnel . . . .5.12.
integralele lui Poisson . . . . .5.12.
integrala Stieltjes-Riemann . 3.3.
inversul unui drum . . . . .2.14.
izomorfism conform . . . . 6.21.

L

lanţ . . . . .3.65.
lanţuri închise omoloage . . .3.65.
lanţ de prelungire . . . . . .7.1.
legea paralelogramului . . . .1.13.
lema integralelor de tip Cauchy .3.18.
lema lui Jordan . . . . . . .5.8.
lema lui Schwarz . . . . . .4.26.
lema lui Weierstrass . . . . .4.3.
limita unei funcţii . . . . .2.5.

M

marginită . . . . .6.3.
modelul lui Poincaré . . . . .2.96.
modulul unui număr complex .1.6.
mulţime compactă . . . . . .1.36.
mulţime conexă . . . . . .1.36.
mulţime echicontinuă de funcţii 6.1.
mulţime de funcţii . . . . .6.1.
mulţime marginită . . . . . 1.36.
mulţime marginită de funcţii .6.3.
mulţime relativ compactă de funcţii . . . . .6.7.

N

număr complex . . . . . . .1.1.

O

omotop cu zero . . . . . . .2.16.
ordinul unei funcţii meromorfe într-un domeniu . . . . . .5.19.
ordinul unui pol . . . . . . .4.49.
ordinul unui punct . . . . .5.19.
ordinul unui zero . . . . . . 4.16.

P

partea imaginară . . . . . .1.6, 2.2.
partea principală . . . . . .4.29.
partea reală . . . . .1.6, 2.2.
partea tayloriană . . . . . .4.29.
planul complex . . . . 1.35.
planul complex extins . . .1 39.
pol . . . . .4.45.
Poisson-Schwarz . . . . . . .4.19.
prelungire analitică a funcţiilor 7.1.
prelungire directă . . . . . .7.1.
prelungire de-a lungul unui drum . . . . .7.4.
prelungire a germenilor . . .7.6.
prelungire olomorfă . . . . .4.22, 7.1.
primitiva . . . . .3.9.
primitiva unei forme diferenţiale . . . . .3.46.
primitiva unei forme închise de-a lungul unui drum . . . . .3.50.
principiul prelungirii olomorfe 4.22.
problema reprezentării conforme 6.21.
proiecţia unui germen . . . .7.6.
proiecţia stereografică . . . .1.44.
punct de acumulare de poli . .4.50.
punct eliminabil . . . . . . .4.37.
punct esenţial . . . . .4.45.
punct final . . . . .1.36.
punct fix atractiv . . . . . .2.80.
punct fix indiferent . . . . .2.80.
punct fix repulsiv . . . . . .2.80.
punct iniţial . . . . .1.36.
punct izolat . . . . .1.36.
punctul de la infinit . . . .1.39.
punct regular . . . . .4.37.
punct singular al funcţiei globale . . . . .7.8.
punct singular izolat . . . .4.37.

R

ramura uniformă . . . . . .3.21.
raza conformă . . . . . . .6.29.

rază de convergență . . . .4.8.
rază de convergență a unui germen . . . . .7.72.
relativ compactă . . . . . .6.7.
relațiile lui Cauchy-Riemann .2.32.
relațiile lui Cauchy-Riemann în coordonate polare . . . . .2.86.
relația de omologie . . . . .3.65.
relația de omotopie . . . . .2.7.
reprezentarea conformă . . .6.21.
reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe . . . .1.29.
reziduu . . . . .4.41.
ridicarea unui drum . . . .7.16.

S

sector unghiular . . . . . . .1.36.
seria binomială . . . . . .4.15.1.
serii de funcții . . . . . . .4.5.
seria geometrică . . . . . . .4.9.5.
seria Laurent . . . . .4.29.
serii de puteri . . . . . . .4.7.
serii Taylor . . . . .4.11.
sfera lui Riemann . . . . .1.47.
spațiu metric complet . . . . 1.36.
suportul unei funcții globale . .7.6.
suprafață riemanniană . . .7.6.
șiruri de funcții olomorfe . . .4.1.

T

teorema analiticității funcțiilor olomorfe . . . . .4.14.
teorema coroanei de convergență 4.29.
teorema de invarianță a domeniului . . . . .5.28.
teorema de legătură dintre primitivă și integrală . . . . .3.10.
teorema dezvoltării în serie Taylor . . . . .4.11.
teorema discului de convergență . . . . .4.8.
teorema fundamentală a algebrei . . . . .3.31., 5.27.2.
teorema identității coeficienților . . . . .4.10., 4.30.
teorema identității funcțiilor olomorfe . . . . .4.20.
teorema indexului . . . . . .3.24.
teorema lui Abel . . . . . . .4.7.
teorema lui Casorati-Weierstrass 4.52.
teorema lui Cauchy . . . .3.15.
teorema lui Cauchy pentru triunghiuri . . . . .3.12.
teorema lui Cauchy-Riemann 2.30.
teorema lui Hurwitz . . . . .6.20.
teorema lui Liouville . . . . .3.29.
teorema lui Montel . . . . . . .6.8.
teorema lui Morera . . . . . .3.20.
teorema lui Poincaré . . . . .7.11.
teorema lui Riemann . . . .6.27.
teorema lui Rouché . . . . .5.26.
teorema lui Vitali . . . . . .6.10.
teorema lui Weierstrass . . . .4.4.
teorema maximului modulului 4.23.
teorema monodromiei . . . .7.13.
teorema ramurilor uniforme . ..3.22
teorema reziduurilor . . . .5.1.
teorema unicității prelungirii. . 7.9.
teorema variației argumentului 5.24.
teorema zerourilor funcțiilor olomorfe . . . . .4.19.
topologia suprafeței riemanniene 7.14., 7.15.
transformări conforme . . . .2.88.
transformarea lui Jukowski . .2.84.
transformări Mellin . . . . .5.16.

U

unghiul dintre două drepte . .1.36.

V

valoarea principală a unei integrale . . . . .3.37.
valoarea principală Cauchy . .5.7.
valoarea unui germen . . . .7.6.
variația pe o diviziune . . . .3.1.
variația totală . . . . .3.1.
versiunea globală a teoremei lui Cauchy . . . . .3.66.

Z

zero . . . . .2.44., 4.16., 4.42.

BIBLIOGRAFIE

1. Ahlfors L. V. : *Complex Analysis*. Mc Graw-Hill New York 1966
2. Angheluță Th. : *Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă*. Editura tehnică, București, 1957
3. Behnke H. — Sommer F. : *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Springer Verlag, Berlin,1965
4. Benkö I: *Funcții complexe. Teoria diferențială*. Universitatea din Brașov, 1974
5. Bieberbach I. : *Analytische Fortsetzung*, Springer Verlag, Berlin, 1955
6. Boboc N. : *Funcții complexe*. Editura didactică și pedagogică, București ,1969
7. Călugăreanu Gh. : *Elemente de teoria funcțiilor de o variabilă complexă*. Editura didactică și pedagogică, București, 1963
8. Cartan H. : *Théorie élémentaire des foctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961
9. Conway J. B. : *Functions of one complexe variable*, Springer Verlag, Berlin, 1973
10. Costinescu O. : *Elmemente de topologie generală*, Editura tehnică, București, 1969
11. Dieudonné J. : *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960
12. Emanuel D. : *Lecțiuni de teoria funcțiilor*, Editura Scrisul Românesc, București, 1924
13. Evgrafov M. A. (și a.) : *Sbornic zadaci po teorii analiticeschih funcții*, Izd. Nauka, Moscova, 1972
14. Gheorghiu N., Precupanu T. : *Analiza matematică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1979
15. Hamburg P. : *Introducere în topologia generală*, Reprografia Universității Craiova, 1971
16. Hurwitz A., Courant R. : *Vorlesungen über allgemeine Funktionstheorie und elliptische Funktionen*. Springer Verlag, Berlin, 1964
17. Kessler P. : *Curs de matematici superioare. Partea a II-a Analiză complexă*, Reprografia Universității Craiova, 1976
18. Lang S. : *Complex Analysis*, Addison— Wesley, Reading, 1977
19. Markușevici A. I. : *Teoria analiticeschih funcții*, Izd. Tehnikescoi lit. Moscova, 1950
20. Mayer Octav : *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, Editura Academiei București, 1981.

21. M.E.I. : *Analiză matematică, vol. I, II*, Editura didactică și pedagogică, București, 1980

22. Mocanu Gh., Stoian Gh., Vişinescu E. : *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă. Culegere de probleme.* Editura didactică și pedagogică București, 1970

23. Negocescu Gh. : *Funcţii complexe*, Litografia Universităţii Iași, 1983

24. Mocanu P. : *Funcţii complexe*, Litografia Universităţii Cluj, 1972

25. Precupanu A. : *Analiză matematică. Funcţii reale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1975

26. Stoilow S. : *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol. I, II, Editura Academiei, București, 1954–58

27. Szökefalvi–Nagy B. : *Komplex függvénytan*, Tankönyv kiadó, Budapest, 1972

28. Volkoviskii L. I., Lunţ G. L., Aramanovici I. G. : *Sbornic zadaci po teorii funcţii complexnogo peremenogo*, Izdat. Fiziko-matematiceskoi literaturi, Moscova, 1961

Plan editură Nr. 9057

Coli de tipar; 10,50

Bun de tipar; septembrie 1982

C. 603 – I. P. „INFORMAŢIA"
Str. Brezoianu Nr. 23–25
București